# 磁流体力学期末复习公式小汇总

Airocéan*

2023 年 10 月 27 日

**摘要**

使用说明：尽管这是磁流体力学期末复习公式小汇总，但是这门课程依旧在复习的时候建议自行推导学习，因此这次的汇总主要是为了方便在进行推导后章节的部分时方便查阅，快速回忆起前面的内容，以达到最后比较熟练掌握的目的，并不是一个完全的汇总，依旧建议不要将这门课当做一个 "背书课"，因此退一步讲，真要复习考试仅靠这个汇总是不够的，但如果你想要方便地按照这门课的最本质目的（即让各位学会）的方式复习考试，那这个汇总在该过程中还是有一定帮助的。

完整和封闭的磁流体力学方程组：

连续性 $\dfrac{\partial\rho(\vec r,t)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec u(\vec r,t))=0$

运动 $\rho(\vec r,t)\dfrac{\mathrm{d}\vec u(\vec r,t)}{\mathrm{d}t}=-\nabla P+\vec J\times\vec B$ $(-\nabla\cdot\overset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{\Pi}})$

能量守恒（状态） $P\rho^{-\gamma}=\mathrm{Const}$

Ampère $\vec J=\dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec B$

Faraday $\dfrac{\partial\vec B}{\partial t}=-\nabla\times\vec E$

Ohm $\vec E=-\vec u\times\vec B$

Gauss $\nabla\cdot\vec B=0$

$\overset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{\Pi}}$ 是粘滞张量

其中热饱和指数 $\gamma=(D+2)/D$

因在 MHD 中 $\omega\ll ck$，可以忽略 $+\mu_0\epsilon_0\partial_t\vec R$（Alfvén 波）

**磁场应力张量（推过）**：

$$\overset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{T}}_{\mathrm{M}}=\frac{B^2}{2\mu_0}\overset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{I}}-\frac{\vec B\vec B}{\mu_0}$$

总的 $\overset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{T}}$ 有

$$\overset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{T}}=\rho\vec u\vec u+\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\overset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{I}}-\frac{\vec B\vec B}{\mu_0}\right)+P\overset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{I}}$$

$$\vec F=-\nabla\cdot\overset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{T}}_{\mathrm{M}}=-\nabla\cdot\frac{B^2}{2\mu_0}\overset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{I}}+\nabla\cdot\frac{\vec B\vec B}{\mu_0}$$

$$\nabla\cdot\frac{B^2}{2\mu_0}\overset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{I}}=\frac{1}{2\mu_0}\nabla B^2$$

磁压力和热压力是对应量，所以也有声波，叫磁声波，慢的。若和热压一起，波速更快，就是快磁声波（带来纵波）

磁张力：

$$\nabla\cdot\frac{\vec B\vec B}{\mu_0}=\frac{1}{2}\vec b\vec b\cdot\nabla B^2+B^2\vec\kappa$$

$\vec\kappa=\vec b\cdot\nabla\vec b$，力沿着曲率方向，想要绷直，当 ideal MHD 时磁冻结，故有电磁和流体的双横波

总磁力：

$$\begin{aligned}\vec F&=\frac{1}{\mu_0}B^2\vec\kappa+\frac{1}{2\mu_0}(\vec b\vec b\cdot\nabla B^2-\nabla B^2)\\&=\frac{1}{\mu_0}B^2\vec\kappa-\frac{1}{2\mu_0}\nabla_\perp B^2\end{aligned}$$

表明总磁力在磁力线垂直方向上，与热压各向同性不同

力线方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec l}{\mathrm{d}l}=\frac{\vec B}{B}$$

三角形相似

$$\frac{\mathrm{d}l_x}{B_x}=\frac{\mathrm{d}l_y}{B_y}=\frac{\mathrm{d}l_z}{B_z}=\frac{\mathrm{d}l}{B}$$

且由于

$$\begin{aligned}\hat e_\theta&=\frac{\nabla\theta}{|\nabla\theta|}=r\nabla\theta\\&=\frac{\frac{1}{r^2}(-x\nabla y+y\nabla x)}{\frac{1}{r^2}\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

如柱坐标力线方程为：

$$\frac{\mathrm{d}r}{B_r}=\frac{r\mathrm{d}\theta}{B_\theta}=\frac{\mathrm{d}z}{B_z}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}=\frac{B_\theta}{rB_z}$$

$$\Rightarrow\delta\theta=\int\mathrm{d}\theta=\int_0^{\delta x}\frac{B_\theta}{rB_z}\mathrm{d}z$$

就是 $\theta$ 方向改变量和 $z$ 方向改变量的关系（从三角形相似也可以看出来）

当磁力线绕大环一周时相当于 $z$ 前进了 $\Delta z=2\pi R$，同时柱面上 $\theta$ 放心啊个转过了

$$\Delta\theta=\frac{2\pi R}{r}\frac{B_\theta}{B_z}$$

则可以定义回转变换角 $\iota=\Delta\theta/2\pi=RB_\theta/rB_z$ 和安全因子

$$q=\frac{r}{R}\frac{B_z}{B_\theta}$$

$B$ 理论上只有两个自由度

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{B_y}{B_x},\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{B_z}{B_x}$$

（微分几何）它们的通解是两组空间曲面

$$\Rightarrow\alpha(x,y,z)=C_1,\ \beta(x,y,z)=C_2$$

$$\vec B=\nabla\alpha\times\nabla\beta$$

$$\nabla\cdot\vec B=0$$

$$\alpha'=\alpha+f(\beta),\ \beta'=\beta+g(\alpha)$$

*airocean@mail.ustc.edu.cn, a@airocean.cn, airocean@foxmail.com, http://airocean.cn/admin/362/, https://zhuanlan.zhihu.com/p/663584966

磁场的标量可以不唯一，这是因为

$$\begin{aligned}\nabla[f(\beta)] &= \frac{\partial_i}{\partial x^i} f(\beta) \\ &= \frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial_i \beta}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \beta} \nabla \beta\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla[f(\beta)] \times \nabla \beta = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \alpha \times \nabla \beta = \nabla \alpha' \times \nabla \beta'$$

且有

$$(\nabla \alpha \times \nabla \beta)\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial \alpha}\frac{\partial \beta'}{\partial \beta} - \frac{\partial \alpha'}{\partial \beta}\frac{\partial \beta'}{\partial \alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial \alpha}\frac{\partial \beta'}{\partial \beta} - \frac{\partial \alpha'}{\partial \beta}\frac{\partial \beta'}{\partial \alpha}\right) = 1$$

当加入对称性之后又减少一个自由度，用一个标量即可表示，比如

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B} &= \nabla_\alpha B_\alpha + \nabla_\beta B_\beta + \nabla_\gamma B_\gamma \\ &= \nabla_\alpha B_\alpha + \nabla_\beta B_\beta = 0\end{aligned}$$

则

$$B_\alpha = \nabla_\beta \psi,\ B_\beta = -\nabla_\alpha \psi$$

就可以满足这个条件

大柱坐标 $(R, \phi, z)$ 和小环坐标 $(r, \theta, \zeta)$ 的转换关系

$$R = R_0 + r\cos\theta$$

$$z = r\sin\theta$$

$$\phi = -\zeta$$

张量分析部分：

逆变：$\vec{a}^i = \nabla \zeta^i$

协变：$\vec{a}_i$

$$J = \frac{1}{V} = \frac{1}{\sqrt{g}}$$

$$g_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j,\ \vec{a}_j = g_{ji} \vec{a}^i$$

Tokamak 磁场位型

$$\vec{B} \cdot \nabla f = 0$$

因此是磁面量（flux label）

其中 P：极向；T：环向

$$\Psi_{\mathrm{P}}(r) = \int_{S_{\mathrm{P}}(r)} \vec{B} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S$$

$$\Psi_{\mathrm{T}}(r) = \int_{S_{\mathrm{T}}(r)} \vec{B} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S$$

$$\begin{aligned}\int_{V(r)} \mathrm{d}^3 x \vec{B} \cdot \nabla \theta &= \int_{V(r)} \mathrm{d}^3 x \nabla \cdot (\vec{B}\theta) \\ &= \int_S \vec{B}\theta \cdot \vec{n} \mathrm{d}S\end{aligned}$$

$$= \int_S \mathrm{d}S(-\vec{n}) \cdot \vec{B}\theta_0 + \int_S \mathrm{d}S \vec{n} \cdot \vec{B}(\theta_0 + 2\pi)$$

$$= 2\pi \int_S \mathrm{d}S \vec{n} \cdot \vec{B}$$

因此

$$2\pi \Psi_{P(r)} = \int_{V(r)} \mathrm{d}^3 x \vec{B} \cdot \nabla \theta$$

$$2\pi \Psi_{T(r)} = \int_{V(r)} \mathrm{d}^3 x \vec{B} \cdot \nabla \zeta$$

所以有

$$\iota = 2\pi \frac{\mathrm{d}\Psi_P}{\mathrm{d}\Psi_T},\ q = \frac{\mathrm{d}\Psi_T}{\mathrm{d}\Psi_P}$$

定义（来自于磁力线在一个磁面上的平面展开）

$$\vec{B} = \nabla \psi \times \nabla(q\theta - \zeta)$$

显然 $\nabla \psi$ 垂直磁面（只是 $r$ 的函数），$\nabla(q\theta - \zeta)$ 在磁面上与磁场垂直，即 $r$ 改变了磁场的大小，$q\theta - \zeta$ 改变了磁力线方向（因为 $\nabla(q\theta - \zeta)$ 的模不会变可以证明

$$\psi(r) = \frac{\Psi_{\mathrm{P}}}{2\pi}$$

$$2\pi q(r) = \frac{\mathrm{d}\Psi_{\mathrm{P}}}{\mathrm{d}\psi}$$

$$\vec{B}_{\mathrm{P}} = \nabla \zeta \times \nabla \psi$$

$$\vec{B}_{\mathrm{T}} = q \nabla \psi \times \nabla \theta$$

**磁冻结和磁扩散**

由下面三个式子

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}$$

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta \vec{J}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

可以得到

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 B$$

其中 $(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} - \nabla(B^2/2)$

$\theta$ **箍缩**：$\vec{B} = B_z(r)$ $\vec{J} = J_\theta(r)$

$z$ **箍缩**：$\vec{B} = B_\theta(r)$ $\vec{J} = J_z(r)$ 长直导线

**螺旋箍缩**：

$$\vec{B} = (0, B_\theta(r), B_z(r))\ \vec{J} = (0, J_\theta(r), J_z(r)$$

此时的平衡方程

$$\frac{\partial P}{\partial r} = J_\theta B_z - J_z B_\theta$$

在任意情况下的平衡方程可以从上面的式子中推出

$$\nabla\left(P + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) = \frac{B^2}{\mu_0} \kappa$$

这个式子表明了**等离子体总压强（包括热压和磁压）梯度（力）被弯曲磁力线的张力所平衡**，这个表述十分适合物理理解

在讲义中的 1.51 式，有

$$I(r) = B_\zeta = \frac{q\psi' R^2}{\sqrt{g}}$$

因此总的磁场这个时候就写成了一种常见的形式

$$\vec{B} = I \nabla \zeta + \nabla \zeta \times \nabla \psi$$

且常用的度规 $g^{33}$ 有

$$\nabla \zeta \cdot \nabla \zeta = \frac{1}{R^2}$$

且有

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

**G-S 方程**：

$$P' + \frac{II'}{R^2} g^{11} - \psi' g^{11} \nabla \cdot (R^{-2} \nabla \psi)$$

Shafranov 位移：因环位型效应导致的环形磁面中心的位移 $\Delta(r_0)$，磁面也会跟着向外移动

磁流体力学波在线性化的过程中需要注意的：

$$P \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \rho^{-\gamma} = P(-\gamma)\rho^{-\gamma-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \rho$$

在

$$\vec{J}_0 \times \vec{B}_1$$

中，有

$$\vec{J}_0 = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}_0 = 0$$

$$c_{\mathrm{s}} = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$$

$$v_{\mathrm{A}}^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0}$$