作者: Airocéan[1]

线性波动问题分类：非磁化 ES、EM 波；磁化 ES、EM 波；漂移波（$\nabla f_{\alpha 0} \neq 0$）；耗散波（碰撞项不为 0）

线性 Vlasov 波动问题分三类：

- 本征模：集体运动 $\omega = \omega(\vec{k})$，所有粒子 $\omega$ 相同，没有时间起点；
- 初值问题，弹道模：对 $t = 0$ 时刻扰动的响应，可以得本征和弹道 $\omega = \vec{k} \cdot \vec{v}$，互有关系；
- 参量过程：对外加持续场的响应。

Fourier 变换：

$$A(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} A(\vec{r}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r}$$

$$A(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\vec{k}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathrm{d}\vec{k}$$

Laplace 变换：有初值的问题：

$$A(p) = \int_0^{\infty} A(t) \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t$$

$\mathrm{Re}(p) \geq p_0 \geq 0$ 才能收敛。其中：

$$\begin{aligned} A'(p) &= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t \\ &= p \int_0^{\infty} A(t) \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t - A(t=0) \\ &= pA(p) - A(t=0) \end{aligned}$$

$$A(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} A(p) \mathrm{e}^{pt} \mathrm{d}p$$

令 $p = -\mathrm{i}\omega$ 就可以变成时频关系

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{P} = 0$$

$$\frac{\partial W^{\mathrm{h}}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{P} + W^{\mathrm{a}} = 0$$

静电波：$\vec{B}_1 = 0$, $\epsilon(\omega, \vec{k})$ 为标量：

$$\frac{\partial W_{\mathrm{ES}}^{\mathrm{r}}}{\partial t} + W_{\mathrm{ES}}^{\mathrm{i}} = 0$$

能量：

$$W_{\mathrm{ES}}^{\mathrm{r}} = \frac{1}{16\pi} |E_0|^2 \frac{\partial}{\partial \omega_0} [\omega_0 \epsilon^{\mathrm{r}}(\omega_0)]$$

能耗：

$$W_{\mathrm{ES}}^{\mathrm{i}} = \frac{1}{8\pi} |E_0|^2 \omega_0 \epsilon^{\mathrm{i}}(\omega_0)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} |E_0|^2 = |E_0|^2 \cdot 2\gamma \\ &\Rightarrow |E_0|^2 = |E_0(t=0)|^2 \mathrm{e}^{2\gamma t} \end{aligned}$$

$$\gamma = -\frac{\omega_{\mathrm{r}} \epsilon^{\mathrm{i}}(\omega_{\mathrm{r}})}{\frac{\partial}{\partial \omega_{\mathrm{r}}} [\omega_{\mathrm{r}} \epsilon^{\mathrm{r}}(\omega_{\mathrm{r}})]}$$

$$W_{\mathrm{ES}}^{\mathrm{r}} \propto \frac{\partial}{\partial \omega_{\mathrm{r}}} [\omega_{\mathrm{r}} \epsilon^{\mathrm{r}}(\omega_{\mathrm{r}})]$$

大于 0 为正能波，小于 0 为负能波；$\epsilon_{\mathrm{i}}$ 大于 0 正耗散，小于 0 负耗散；$\gamma$ 大于 0 不稳定性，小于 0 阻尼

静电波：Vlasov：

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \vec{v} \cdot f_{\alpha 1} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \nabla \phi_1 \cdot \nabla_v f_{\alpha 0} = 0$$

Poisson:

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = -\nabla^2 \phi_1 = 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int f_{\alpha 1} \mathrm{d}\vec{v}$$

其中

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_{\alpha 1}(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega t)} \mathrm{d}\vec{r}\, \mathrm{d}t \\ =& \int_{-\infty}^{+\infty} [-\mathrm{i}\omega f_{\alpha 1}(\vec{r}, \vec{v}, \omega) - f_{\alpha 1}(\vec{r}, \vec{v}, t=0)] \\ &\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r} \\ =& -\mathrm{i}\omega f_{\alpha k}(\vec{k}, \vec{v}, \omega) - f_{\alpha k}(\vec{k}, \vec{v}, t=0) \end{aligned}$$

这里自变量写 $\omega$ 是代指，严谨确实应该写 $\mathrm{i}\omega$。同理，以一维为例

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r} f_{\alpha 1}(\vec{r}, \vec{v}, t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr} \mathrm{d}r \\ =& \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ f_{\alpha 1}(\vec{r}, \vec{v}, t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr} \right] \right. \\ &\left. + \mathrm{i} f_{\alpha 1} k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr} \right\} \mathrm{d}r \\ =& \mathrm{i}k f_{\alpha k} \end{aligned}$$

这里面用的是归一化的分布函数，所以有用 $n_\alpha$，来源于 $N_\alpha = n_{\alpha 0} \int f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) \mathrm{d}\vec{r} \mathrm{d}\vec{t}$

$$-\mathrm{i}(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) f_{ak} = f_{ak}(0) + \mathrm{i} \frac{q_a}{m_a} \vec{k} \cdot \nabla_v f_{a0} \varphi_k$$

$$k^2 \varphi_k = 4\pi \sum_a n_\alpha q_a \int f_{ak}\, \mathrm{d}\vec{v}$$

$$\Rightarrow f_{ak} = \frac{\mathrm{i} f_{ak}(0) - (q_a/m_a)\, \vec{k} \cdot \nabla_v f_{a0} \varphi_k}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}}$$

$$\Rightarrow k^2 \varphi_k \left( 1 + \sum_a \frac{4\pi n_a q_a^2}{k^2 m_a} \int \frac{\vec{k} \cdot \nabla_v \hat{f}_{\alpha_0}}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}}\, \mathrm{d}\vec{v} \right)$$

$$= 4\pi \mathrm{i} \sum_a n_\alpha q_a \int \frac{\hat{f}_{ak}(0)}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}} \mathrm{d}\vec{v}$$

且有 $\omega_{\mathrm{p}\alpha}^2 = 4\pi n_{\alpha 0} q_\alpha^2 / m_\alpha$，令介电常数：

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega, \vec{k}) &= 1 + \sum_\alpha \frac{\omega_{\mathrm{p}\alpha}^2}{k^2} \int \frac{\vec{k} \cdot \nabla_v \hat{f}_{\alpha 0}}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}} \mathrm{d}\vec{v} \\ &= 1 + \sum_\alpha \chi_\alpha \end{aligned}$$

$\chi_\alpha$ 为极化率，最终可得

$$\varphi_k = 4\pi \mathrm{i} \frac{\sum_\alpha n_{\alpha 0} q_\alpha \int \frac{\hat{f}_{\alpha 0}}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}} \mathrm{d}\vec{v}}{k^2 \epsilon(\omega, \vec{k})}$$

对于本征值问题，无时间起点，有 $\hat{f}_{\alpha k}(t=0) = 0$，则 $\epsilon(\omega, \vec{k}) \varphi_k = 0$，且 $\varphi \neq 0$ 则 $\epsilon(\omega, \vec{k}) = 0$，即本征值满足的方程。色散关系：$\omega_j = \omega_j(\vec{k}) (j = 1, 2, ...)$，与粒子速度无关；初值问题（弹道模）：与粒子速度有关，出现相混，$\epsilon(\omega, \vec{k}) \neq 0$，给出 $\varphi_k$.

**耗散型**和**反应型**的基本区分：发生不稳定性的**机理**不同。前者波-波相互作用（正负能波耦合），后者粒子-波相互作用（波的能量到粒子里面去了）。

**静电波**和**电磁波**的区别：有无扰动磁场。

**准电磁**和**准静电**的区别：分别是电磁和静电占主要。

**横纵波**的区别：扰动电场 $\vec{E}_1$ 和波传播方向 $\vec{k}$ 的方向关系。

**反应型：**

$$\epsilon(\omega, \vec{k}) = \epsilon_{\mathrm{r}}(\omega, \vec{k}) + \mathrm{i} \epsilon_{\mathrm{i}}(\omega, \vec{k})$$

不显含虚部，即 $\epsilon_{\mathrm{i}} = 0$；耗散型，显含虚部。反应型可以假设所有粒子有同样的速度：

$$f_{\alpha 0}(\vec{v}) = n_{\mathrm{b(eam)}\alpha} \delta(\vec{v} - \vec{u}_\alpha)$$

最后可得（利用分部积分以及相空间中全空间散度积分为 0 消项）：

$$D(\omega, k) = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{\mathrm{ba}}^2}{(\omega - k u_\alpha)^2}$$

若令离子不动 $\vec{u}_{\mathrm{i}} = 0$ 则：

$$D(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{be}}^2}{(\omega - ku)^2} - \frac{\omega_{\mathrm{bi}}^2}{\omega^2}$$

且 $\omega_{\mathrm{ba}\alpha}^2 = 4\pi n_{\mathrm{b}\alpha} e^2 / m_\alpha$, $\alpha = \mathrm{e}, \mathrm{i}$ 由于离子质量很大，可以进一步取 $m_{\mathrm{i}} = \infty$，可得

$$D(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{be}}^2}{(\omega - ku)^2}$$

求解，可得快波和慢波，快波：

$$\omega_1 = ku + \omega_{\mathrm{be}}, \qquad \frac{\omega}{k} = u + \frac{\omega_{\mathrm{be}}}{k}$$

慢波：

$$\omega_2 = ku - \omega_{\mathrm{be}}, \qquad \frac{\omega}{k} = u - \frac{\omega_{\mathrm{be}}}{k}$$

按照扰动波能公式：

$$W_{\mathrm{ES}}^{\mathrm{r}} \propto \frac{\partial}{\partial \omega_{\mathrm{r}}} [\omega_{\mathrm{r}} \epsilon^{\mathrm{r}}(\omega_{\mathrm{r}})]$$

可以看出：

$$\omega_1 : \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega D(\omega, k)) = 2 \left( 1 + \frac{ku}{\omega_{\mathrm{be}}} \right) > 0$$

$$\omega_2 : \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega D(\omega, k)) = -2 \left( -1 + \frac{ku}{\omega_{\mathrm{be}}} \right) < 0$$

[1]airocean@mail.ustc.edu.cn, a@airocean.cn, airocean@foxmail.com, http://airocean.cn

即一个正能波一个负能波，负能波的物理意义在 P351-353 中有解释，负能波只能说波能在扰动过程中变小了，有一个波能减小的机制，其本源还是在于 $D(\omega,k)=1-\omega_{\mathrm{be}}^2/(\omega-ku)^2$ 有两支不同的解，把这个现象想明白了就知道负能波的来源了，对于在 MHD 来说，这个甚至完全不是一个 Maxwell 分布的情况，当然在 MHD 中得不出这个解释。

**耗散型**：根据 1.2 章推导的，有

$$\frac{\partial\vec{\sigma}(\omega_0)}{\partial\omega_0}\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}=\vec{\sigma}\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

虽然你很奇怪他为什么要写成这个鬼样子但反正他就这么写成这个鬼样子了，在耗散型中，会有令 $\omega=\omega_{\mathrm{r}}+\mathrm{i}\gamma$，且 $k$ 为实数，有

$$\epsilon(\omega,\vec{k})=\epsilon(\omega_{\mathrm{r}}+\mathrm{i}\gamma,\vec{k})=\epsilon(\omega_{\mathrm{r}},\vec{k})+\mathrm{i}\gamma\frac{\partial\epsilon(\omega_{\mathrm{r}},\vec{k})}{\partial\omega_{\mathrm{r}}}$$

在弱耗散的情况下，$\gamma$ 很小，可以忽略，且因为是本征问题要满足 $\epsilon_{\mathrm{r}}=0$，因此有

$$\gamma=-\frac{\omega_{\mathrm{r}}\epsilon_{\mathrm{i}}(\omega_{\mathrm{r}})}{\frac{\partial}{\partial\omega_{\mathrm{r}}}[\omega_{\mathrm{r}}\epsilon_{\mathrm{r}}(\omega_{\mathrm{r}})]}\Leftrightarrow\gamma=-\frac{\epsilon_{\mathrm{i}}}{\partial\epsilon_{\mathrm{r}}/\partial\omega_{\mathrm{r}}}$$

$$\begin{aligned}&D\left(\omega_{\mathrm{r}},k\right)\\&=1-\sum_a\frac{\omega_{\mathrm{p}\alpha}^2}{k^2}\int\frac{\partial f_{\alpha0}/\partial u}{u-\omega_{\mathrm{r}}/k-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{i}}/k}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Plemelj 公式：

$$\frac{1}{x\pm\mathrm{i}\varepsilon}=\mathcal{P}\frac{1}{x}\mp\mathrm{i}\pi\delta(x)$$

其中 $\mathcal{P}$ 表 Cauchy 主值，$\delta(x)$ 为 Dirac 函数，有性质：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x)\mathrm{d}x=f(0)$$

$$\begin{aligned}&\int\frac{\partial f_{\alpha0}/\partial u}{u-\omega_{\mathrm{r}}/k-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{i}}/k}\,\mathrm{d}u\\&=\mathcal{P}\int\frac{\partial f_{\alpha0}/\partial u}{u-\omega_{\mathrm{r}}/k}\,\mathrm{d}u+\mathrm{i}\pi\frac{\partial f_{\alpha0}}{\partial u}\bigg|_{\kappa=\omega_{\mathrm{r}}/k}\end{aligned}$$

根据 Plemelj 公式可以解决奇点问题，得到 Landau 阻尼：

$$\begin{aligned}&D_{\mathrm{r}}\left(\omega_{\mathrm{r}},\vec{k}\right)\\&\quad=1-\sum_a\frac{\omega_{\mathrm{p}\alpha}^2}{k^2}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_{a0}/\partial u}{u-\omega_{\mathrm{r}}/k}\mathrm{d}u\\&D_{\mathrm{i}}\left(\omega_{\mathrm{r}},\vec{k}\right)=-\pi\sum_a\frac{\omega_{\mathrm{p}\alpha}^2}{k^2}\frac{\partial f_{\alpha0}}{\partial u}\bigg|_{\omega_{\mathrm{r}}/k}\end{aligned}$$

由于已经假设了 $\partial\epsilon_{\mathrm{r}}/\partial\omega_{\mathrm{r}}$（假设原因待补充（共振点在速度轴的正方向估计是）），因此 $\gamma$ 的正负和 $D_{\mathrm{i}}$ 有直接关系，在共振点 $u=\omega_{\mathrm{r}}/k$ 处，$\partial f_{\alpha0}/\partial u<0,\rightarrow\gamma<0$，阻尼（**Landau 阻尼**），$\partial f_{\alpha0}/\partial u>0,\rightarrow\gamma>0$，不稳定性（**逆 Landau 阻尼**），Landau 路径积分的算法与留数定理的算法一致。在无碰撞的情况下，原来的慢粒子群会变成快粒子群，会把斜率反过来形成往复的振荡；有碰撞时会使得偏离共振速度的粒子更加偏离共振速度从而不形成往复振荡，波的能量就此被带走，宏观上可测量到。

平衡态 Maxwell 分布：

$$f_{\alpha\mathrm{M}}=\frac{1}{\pi^{3/2}v_{\mathrm{t}\alpha}^3}\exp\left(-\frac{v^2}{v_{\mathrm{t}\alpha}^2}\right)$$

$$v_{\mathrm{t}\alpha}=\sqrt{\frac{2T_\alpha}{m_\alpha}}$$

极化率有

$$\begin{aligned}\chi_\alpha&=\sum_\alpha\frac{\omega_{\mathrm{p}\alpha}^2}{k^2}\int\frac{\vec{k}\cdot\nabla_v\hat{f}_{\alpha0}}{\omega-\vec{k}\cdot\vec{v}}\mathrm{d}\vec{v}\\&=\frac{\omega_{\mathrm{p}\alpha}^2}{v_{\mathrm{t}\alpha}^3k^2\sqrt{\pi}}\int\frac{2u}{u-\omega/k}\exp\left(-\frac{u^2}{v_{\mathrm{t}\alpha}^2}\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{k^2\lambda_{\mathrm{D}\alpha}^2\sqrt{\pi}}\int\frac{x}{x-\xi_\alpha}\exp(-x^2)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{k^2\lambda_{\mathrm{D}\alpha}^2}\left(1+\xi_\alpha\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\frac{\exp(-x^2)}{x-\xi_\alpha}\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

具体过程需要自己算一下，其中有

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{\mathrm{p}\alpha}^2}{v_{\mathrm{t}\alpha}^2}&=\frac{1}{\lambda_{\mathrm{D}\alpha}^2}\\\xi_\alpha&=\frac{\omega}{kv_{\mathrm{t}\alpha}}=\frac{v_\phi}{v_{\mathrm{t}\alpha}}\\x&=\frac{u}{v_{\mathrm{t}\alpha}}\end{aligned}$$

漂移波有 $\vec{v}-\vec{u}_\alpha$ 项，不确定来源有 Doppler 频移。

**静电不稳定性波模的物理分析**：书上 P356（可能看老师手稿会更清楚一点）

**冷热等体近似**（需要推），冷：

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{\mathrm{r}}}{k}&=v_\phi\gg v_{\mathrm{t}\alpha},\ \xi_{\mathrm{r}\alpha}\gg1\rightarrow\\Z(\xi_\alpha)&=-dfrac1\xi_\alpha\left(1+\frac{1}{2\xi_\alpha^2}+\frac{3}{4\xi_\alpha^4}\right)\\\chi_{\alpha\mathrm{r}}&\backsimeq-\frac{\omega_{\mathrm{p}\alpha}^2}{\omega_{\mathrm{r}}^2}\left(1+\frac{3}{2}\frac{k^2v_{\mathrm{t}\alpha}^2}{\omega_{\mathrm{r}}^2}\right)\end{aligned}$$

热：

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{\mathrm{r}}}{k}&=v_\phi\ll v_{\mathrm{t}\alpha},\ \xi_{\mathrm{r}\alpha}\ll1\rightarrow\\Z(\xi_\alpha)&=-2\xi_\alpha\left(1-\frac{2}{3}\xi_\alpha^2\right)\\\chi_{\alpha\mathrm{r}}&\backsimeq\frac{1}{k^2\lambda_{\mathrm{D}\alpha}^2}\end{aligned}$$

这里还有 EPW，IAW 的东西

**Weibel 不稳定性**：书 P386、387，看图说话比较爽。

有限 Larmor 轨道效应、回旋共振效应

**有限 Larmor 轨道效应（FLR）**：$b_\alpha$ 有限，不能认为是 0 或者是无穷大，导致 Bessel 函数的虚、宗量 $J_n(k_\perp r_\perp)$ 不可以忽略所带来的效应。可以使得波的色散关系从纯静电、纯电磁波变成有电磁和静电特性的复杂的“动理学波”。

**磁化等体**：**静电波**有强磁化：$B_0\rightarrow\infty,\rho_\perp\rightarrow0,J_0(0)=1,J_{n\neq0}(0)=0$，垂直方向被冻结，$\xi$ 里面只出现平行方向上的量，平行方向上的相应和非磁化的情况一样。弱磁化：$B_0\rightarrow0,\rho_\perp\rightarrow\infty,\sum_nJ_n^2(\rho_\perp)=1$，所有结果自然与非磁化一样。

**电磁波**：在**平行于磁场方向传播的波**中，有两支本征模，左旋波和右旋波，在 $\omega\pm\omega_{\mathrm{c}\alpha}=k_\parallel v_\parallel$ 会发生共振，产生回旋阻尼，因此回旋方向和粒子种类有关，电子右共振，离子左共振。

**垂直磁化中**：由于 $k_\parallel=0$，故不存在回旋共振阻尼，且正是因为回旋共振，本征摸的整个频谱被这些共振分为了无穷多的分支，可以参考书 P418、419 的图。总的磁场电磁波色散函数有 $D_{zz}(D_{xx}D_{yy}-D_{xy}D_{yx})=0$，当 $D_{zz}=0$ 时是 O 波（正常回旋波），当 $D_{xx}D_{yy}=D_{xy}D_{yx}$ 是 X 波（反常回旋波），在反常回旋波中，若 $D_{xy}D_{yx}\simeq0\Rightarrow D_{xx}=0$ 是准静电的 **Bernstein 波**（这里还待再看一下），$\Rightarrow D_{yy}=0$ 是准电磁的 X 波。

**输运概念**：

弹性碰撞：能量和动量子在且仅在粒子间的双重守恒

自扩散：原在垂直方向上没有动量和能量，经历了碰撞之后粒子被随机散射到各个方向，在垂直方向上有了动量和能量（总动量依然为 0），且能量不断增大，垂直方向有

$$\frac{\mathrm{d}\epsilon_\perp}{\mathrm{d}t}=\frac{\epsilon_\perp}{\tau_\perp}=\nu_\perp\epsilon_\perp$$

平行方向的动量和能量上也有和上面式子完全同结构的方程（就是肯定会多一个负号）

输运：高参数向低参数的位置中的有向运动

求 $n$ 阶矩定义：

$$\int \vec{v}^n f(\vec{v})\mathrm{d}^3\vec{v}$$

零阶连续性方程，一阶动量方程，二阶能量方程，为了让方程组截断封闭，使用宏观的输运定律，分别是 Fick's law, Fourier's law 和 Newton 粘滞定律

$$\Gamma_\alpha = n_\alpha(\vec{r},t)\vec{u}_\alpha(\vec{r},t) = -D_\alpha\nabla n_\alpha$$

$$\vec{q}_\alpha = -\kappa_\alpha\nabla T_\alpha$$

$$\overleftrightarrow{\Pi}_\alpha = -\zeta_\alpha\left(\overleftrightarrow{\Lambda} - \frac{2}{3}\overleftrightarrow{I}\nabla\cdot\vec{u}\right) - \gamma_\alpha\overleftrightarrow{I}(\nabla\cdot\vec{u})$$

集体输运的描述：
碰撞摩擦力

$$\vec{R}_\alpha = \int m_\alpha\vec{v}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)\mathrm{d}\vec{v} = \sum_\beta \vec{R}_{\alpha\beta}$$

碰撞交换的热量：$Q_\alpha^\mathrm{c}$
平均速度与无规热运动：

$$\vec{v} = \vec{u}_\alpha + \vec{w},\ <\vec{v}>=\vec{u}_\alpha,\ <\vec{w}>=0$$

粘滞张量与粘滞系数（非对角线部分）：

$$\overleftrightarrow{\Pi}_\alpha = \int m_\alpha\vec{w}\vec{w}f_\alpha\mathrm{d}\vec{v}$$

热流与热传导系数：

$$\vec{q}_\alpha = \frac{1}{2}\int m_\alpha w^2\vec{w}f_\alpha\mathrm{d}\vec{v}$$

碰撞算子有三种 Krook(BGK)，Boltzmann，Fokker-Planck.
BGK 中满足

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_\mathrm{c} = -\frac{f_\alpha - f_{\alpha0}}{\tau_\mathrm{c}} = -\nu_\mathrm{c}(f_\alpha - f_{\alpha0})$$

很明显有弛豫时间（半衰期）的物理意义。
Boltzmann 是积分形式，其基本假定有：两体碰撞，分子混沌，碰撞前后自由飞行
Fokker-Planck 碰撞项：

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_\mathrm{c} = -\nabla_v\cdot(f\langle\Delta\vec{v}\rangle) + \frac{1}{2}\nabla_v^2 : (f\langle\Delta\vec{v}\Delta\vec{v}\rangle)$$

定义

$$\langle\Delta\vec{v}\rangle = \frac{1}{\Delta t}\int\psi\Delta\vec{v}\mathrm{d}(\Delta\vec{v})$$

$$\langle\Delta\vec{v}\Delta\vec{v}\rangle = \frac{1}{\Delta t}\int\psi\Delta\vec{v}\Delta\vec{v}\mathrm{d}(\Delta\vec{v})$$

$\langle\Delta\vec{v}\rangle$ 是摩擦系数，$\langle\Delta\vec{v}\Delta\vec{v}\rangle$ 是扩散系数，$\psi$ 是转移几率，基本假定有 1.Markov 过程，$\psi$ 与 $t$ 无关（与分子混沌等价）；2.$\Delta v \ll v$，小角散射
考虑试探离子 $f(t=0)=\delta(\vec{v}-\vec{u}), \vec{u}(t=0)=u\hat{e}_z$，将其带入并求一阶矩，利用分部积分法，得到

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \langle\Delta\vec{u}\rangle = -\frac{\vec{u}}{\tau_\mathrm{c}} = -\nu_\mathrm{c}\vec{u}$$

这里也可以看出来 $\langle\Delta\vec{v}\rangle$ 具有摩擦系数的意义；二阶矩同理，利用 $\vec{w}=\vec{v}-\vec{u}$ 求二阶矩，得到

$$\int\vec{w}\vec{w}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}\vec{v} = \frac{\partial}{\partial t}\langle\vec{w}\vec{w}\rangle = \langle\Delta\vec{v}\Delta\vec{v}\rangle$$

$$\frac{\partial w^2}{\partial t} = \langle\Delta u\Delta u\rangle = \frac{u^2}{\tau_\mathrm{D}} = \nu_\mathrm{D}u^2$$

有能量扩散的意义
Rosenbluth 势：的确有势函数的意义在里面

$$\langle\Delta\vec{v}\rangle = \Gamma_1\frac{\partial H(\vec{v}_1)}{\partial\vec{v}_1}$$

$$\langle\Delta\vec{v}\Delta\vec{v}\rangle = \Gamma_1\frac{\partial^2 G(\vec{v}_1)}{\partial\vec{v}_1\partial\vec{v}_1}$$

Rosenbluth 势与 Landau 碰撞项在物理假定上等价，Rosenbluth：1.Markov 近似；2. 小 $\Delta\vec{v}$ 展开；3.Coulomb 相互作用；4. 两体碰撞，其中前两个用于导出 Fokker-Planck 碰撞项，后两个用于导出 Rosenbluth 势。
Landau：1. 分子混沌假定；2. 两体碰撞；3.Coulomb 相互作用；4. 小 $\Delta\vec{v}$ 展开。前两个用于导出 Boltzmann 碰撞项，后两个用于导出 Landau 碰撞算子，在统计物理上 Markov 近似等价于分子混沌假定。
Landau 碰撞项中有：

$$c_{ij} = c_{ji}\ \ \chi_{ij} = -\chi_{ji}$$

利用这两个对称性再用零一二阶求矩可以求 Landau 碰撞算子的数、动量、能量守恒性：

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_\mathrm{c} = \sum_j\frac{c_{ij}}{m_i}\frac{\partial}{\partial\vec{v}_i}\cdot\int\frac{\partial|\vec{v}_i-\vec{v}_j|}{\partial\vec{v}_i\partial\vec{v}_j}\cdot\chi_{ij}\mathrm{d}\vec{v}_j$$

**利用时间弛豫近似求各输运系数**，其中粒子流

$$\vec{\Gamma} = \int\vec{v}\hat{f}\mathrm{d}\vec{v}$$

电流

$$\vec{J} = e\int\vec{v}\hat{f}\mathrm{d}\vec{v}$$

热流

$$\vec{q} = \int\frac{1}{2}mw^2\vec{w}\hat{f}\mathrm{d}\vec{v}$$

黏性张量的一个分量：

$$\Pi_{xx} = \int mw_xw_x\hat{f}\mathrm{d}\vec{v}$$

定态情况下有（这也不是一般认为的线性化，在这里 $\nu\hat{f}$ 并不是一阶小量）：

$$\hat{f} = -\frac{1}{\nu}\left[\vec{v}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial\vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial\vec{v}}\right]$$

在求解过程中还需要清楚的是

$$f_0 = n(\vec{r})\frac{1}{\pi^{3/2}v_\mathrm{t}^3}\exp\left(-\frac{(\vec{v}-\vec{u}(\vec{r}))^2}{v_\mathrm{t}^2}\right)$$

$$f_0 = n(\vec{r})f_\mathrm{M}(v^2)$$

$$\int\vec{v}\vec{v}f_\mathrm{M}(v^2)\mathrm{d}\vec{v} = \frac{T}{m}$$

最后可以得到各个系数：

$$D = \frac{T}{m\nu},\ \sigma = \frac{q^2n}{m\nu}$$

$$\zeta = \frac{nT}{\nu},\ \kappa = \frac{5}{2}\frac{nT}{m\nu}$$

以及横越磁场的静电输运系数（在方程里保留了 $\vec{v}\times\vec{B}$ 项）：这个时候用原来的方程推导，其中要用到 $\nabla_v(\vec{v}\times\vec{b})=0$，可得

$$\vec{\Gamma} = -D\nabla n + \frac{\omega_\mathrm{c}}{\nu}\vec{\Gamma}\times\hat{b}$$

$$\Gamma_\parallel = -D\nabla_\parallel n = -D_\parallel\nabla_\parallel n$$

$$\vec{\Gamma}_\perp = -D_\perp\nabla_\perp n - D_\mathrm{H}\nabla_\perp n\times\hat{b}$$

$$\vec{\Gamma}_\perp = -D\nabla_\perp n + \frac{\omega_\mathrm{c}}{\nu}\vec{\Gamma}_\perp\times\hat{b}$$

$$\vec{\Gamma}_\perp\times\hat{b} = -D_\perp\nabla_\perp n\times\times\hat{b} - \frac{\omega_\mathrm{c}}{\nu}\vec{\Gamma}_\perp$$

$$\vec{\Gamma}_\perp = -\frac{D_\parallel}{1+\dfrac{\omega^2}{\nu^2}}\nabla_\perp n$$

$$-\frac{\omega_\mathrm{c}}{\nu}\cdot\frac{D_\parallel}{1+\dfrac{\omega^2}{\nu^2}}\nabla_\perp n\times\hat{b}_0$$

就得到了上面的式子。
最后一个方程右边第一项是径向扩散项，第二项是角向漂移项，以及垂直和平行方向的因子：

$$D_\perp = \frac{1}{1+\omega_\mathrm{c}^2/\nu^2}D_\parallel$$

**BBGKY**

$f_n$ 是 $6N$ 维的分布函数，$f_s$ 是约化的分布函数，$P(1,2)$ 是关联函数，关联函数与 Debye 屏蔽有关