作者: Airocéan[1,2]

$$\sigma(x)=\frac{F_N(x)}{A(x)}\quad \sigma=E\varepsilon$$

$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l}$$

$$\Delta l=\frac{Fl}{EA}\leftarrow \mathrm{d}(\Delta l)=\frac{F\mathrm{d}l}{EA}$$

$$\varepsilon'=-\mu\varepsilon$$

$$\tau=\frac{F_s}{A}\le[\tau]$$

$$M=9549\frac{P|_{kW}}{n|_{r/min}}$$

$$\begin{cases}\tau=G\gamma\\ \tau=G\rho\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\\ M=GI_\rho\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\\ \text{Any}:\tau_\rho=\dfrac{M_\rho}{I_\rho}\\ \tau_{\max}=\dfrac{M}{W_t}\end{cases}$$

$$I_\rho=\frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4)$$

$$W_t=\frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)$$

$$\varphi=\frac{Ml}{GI_\rho}$$

$$S_z=\int_A y\mathrm{d}A$$

$$\bar y=\frac{S_z}{A}\to S_z=\bar yA$$

$$\left(y_c=\frac{\sum S_{z_i}}{\sum A_i}=\frac{\sum A_iy_{c_i}}{A}\right)$$

负面积，面积为负

对 y 惯性矩：

$$I_y=\int_A z^2\mathrm{d}A$$

$$I_\rho=I_z+I_y$$

圆截面 $I_z=I_y=\dfrac{1}{64}\pi(D^4-d^4)$

矩截面 $I_z=\dfrac{1}{12}bh^3$（z,h 垂直，对什么取矩，自然与它垂直得多）

惯性半径：

$$I_z=Ai_z^2\to i_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

在坐标 (y,z) 处与惯性积

$$I_{yz}=\int_A yz\mathrm{d}A$$

（自然有一个轴为对称轴时，$I_{zy}=0$）

$$\begin{cases}I_z=I_{z_c}+a^2A\\ I_y=I_{y_c}+b^2A\\ I_{zy}=I_{z_cy_c}+abA\end{cases}$$

自然有 y,y_c 之间相差他俩之间的距离，这里就是 b，证明利用了静矩形为 0，好证明这里就是有利用了 Descartes 的坐标变换，硬推出来的结果：

$$\begin{cases}I_{z_1}=\dfrac{I_z+I_y}{2}+\dfrac{I_z-I_y}{2}\cos 2\alpha-I_{zy}\sin 2\alpha\\ I_{y_1}=\dfrac{I_z+I_y}{2}-\dfrac{I_z-I_y}{2}\cos 2\alpha+I_{zy}\sin 2\alpha\\ I_{z_1y_1}=\dfrac{I_z-I_y}{2}\sin 2\alpha+I_{zy}\cos 2\alpha\end{cases}$$

当 $\alpha=\alpha_0$，一个轴过形心，I 有最大值最小值，此时 $I_{z_0y_0}=0\to\tan 2\alpha_0=\dfrac{-2I_{zy}}{I_z-I_y}$

$$I_{\substack{\max\\ \min}}=I_{\substack{z_0\\ y_0}}=\frac{I_z+I_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{I_z-I_y}{2}\right)^2+I_{zy}^2}$$

形心主惯性轴即主轴远点在形心上，本质上还是看 $I_{\max},I_{\min}$，可以用二向应力中的图解法解决一轴对称，过对称轴及垂直；二轴对称，就是；三轴对称，任意左上右下，左顺右逆（凹）为正

$$\frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x}=q(x)\quad \frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=Q(x)$$

具体证明过程老书 P122，有高阶小量，剩下的全是数学问题，下面老书 P140

$$\sigma=E\frac{y}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI_z}$$

$$\sigma=Ey\frac{M}{EI_z}=\frac{My}{I_z}$$

$$\sigma_{\max}=\frac{M}{I_z/y_{\max}}=\frac{M}{W_z}$$

EI_z 抗弯刚度或者抗弯截面系数，下面老书 P147

$$\tau=\tau'=\frac{F_QS_z^*}{bI_z}$$

S_z^* 表示截面上距中性轴为 y 的横线意外部分面积对于中性轴的静矩

$$v=f(x)\to\tan\theta=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{1}{\rho}=\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|\to\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{M}{EI}$$

$$\left[\frac{v''(x)}{\left(1+[v'(x)]^2\right)^{3/2}}=\pm\frac{M(x)}{EI}\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}=\frac{M(x)}{EI}$$

梁在简单在和作用下的变形在老书 P185，由于图不好画这里省略

$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_{xy}\cos 2\alpha$$

与坐标转换的转轴公式类似；$\sigma(\tau)_\alpha$ 正负号同 $\alpha(\tau)$，α 正负为右手定则，计算时代入正负号；同理，极值正应力即为主应力

$$\tan 2\alpha_0=\frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\alpha_1=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\tau_{\substack{\max\\ \min}}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\alpha_0\tan 2\alpha_1=-1\to\alpha_1=\alpha_0+45^\circ$$

$$\left(\sigma_\alpha-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_\alpha^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2$$

$$O=\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},0\right)$$

$$R=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}[\sigma_y-\mu(\sigma_z+\sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}\ \gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G}\ \gamma_{zx}=\frac{\tau_{zx}}{G}$$

[1] airocean@mail.ustc.edu.cn, a@airocean.cn, airocean@foxmail.com

[2] http://airocean.cn

由于高阶小量

$$\Theta=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

$$\Theta=\frac{\sigma_{\mathrm{m}}}{K}$$

$$K=\frac{E}{3(1-2\mu)}$$

$$\sigma_{\mathrm{m}}=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}$$

K 体积弹性模量，σ_{m} 三个主应力平均值

$$\begin{aligned}u=&\frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1+\frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2+\frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3\\u=&\frac{1}{2E}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2\\&-2\mu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_3\sigma_2+\sigma_1\sigma_3)]\end{aligned}$$

u 总应变能密度，u_t 体积改变比能，u_x 形状改变比能

$$\begin{aligned}u=&u_t+u_x\\u_t=&\frac{1-2\mu}{6E}\left(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\right)^2\\u_x=&\frac{1+\mu}{6E}\Big[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2\\&+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2\Big]\end{aligned}$$

四种强度理论，老书 P241 起

第一，最大拉应力，断裂

$$\sigma_1\le\frac{\sigma_b}{n}=[\sigma]$$

第二，最大伸长线应变，断裂

$$\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)\le\frac{\sigma_b}{n}=[\sigma]$$

第三，最大切应力，屈服

$$\sigma_1-\sigma_3\le\frac{\sigma_s}{n_s}=[\sigma]$$

第四，畸变能密度，屈服

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2\right]}$$

$$\le\frac{\sigma_s}{n_s}=[\sigma]$$

脆性材料:当最小主应力大于等于零时,使用第一理论;当最大主应力小于等于零时,使用第三或第四理论。塑性材料：当最小主应力大于等于零时,使用第一理论;其它应力状态时，使用第三或第四理论。简单变形时：一律用与其对应的强度准则。如扭转，都用：$\tau_{\max}\le[\tau]$。破坏形式还与温度、变形速度等有关。无论塑脆，三拉相近，断裂，用最大拉应力；无论塑脆，三压相近，塑性，用第三第四。

$$\frac{y_0}{I_z}\sin\varphi+\frac{z_0}{I_y}\cos\varphi=0$$

所以肯定过形心，下面肯定不过形心，看系数啊（这里第一个去掉角标 0 也是基本公式）

$$\begin{aligned}&\sigma=-\frac{F}{A}-\frac{M_zy_0}{I_z}-\frac{M_yz_0}{I_y}=0\Rightarrow\\&\frac{F}{A}+\frac{F\cdot e_y\cdot y_0}{I_z}+\frac{F\cdot e_z\cdot z_0}{I_y}=0\Rightarrow\\&1+\frac{e_y\cdot y_0}{i_z^2}+\frac{e_z\cdot z_0}{i_y^2}=0\\&a_y=-i_z^2/e_y;\quad a_z=-i_y^2/e_z\\&I_z=A\cdot i_z^2\\&I_y=A\cdot i_y^2\end{aligned}$$

利用 $\sigma_{\max/\min}$

$$\begin{aligned}\sigma_1&=\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\\\sigma_2&=0\\\sigma_3&=\frac{\sigma}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xd3}&=\sigma_1-\sigma_3\le[\sigma]\\\sigma_{xd3}&=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{M_w}{W}\right)^2+4\left(\frac{M_n}{2W}\right)^2}\\&=\frac{1}{W}\sqrt{M_w^2+M_n^2}\le[\sigma]\end{aligned}$$

$\sqrt{M_w^2+M_n^2}$ 第三强度理论计算弯矩

$\sigma_{xd4}=$

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2\right]}$$

$\sigma_{xd4}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}\le[\sigma]$

$\sigma_{xd4}=\frac{1}{W}\sqrt{M_w^2+0.75M_n^2}\le[\sigma]$

$\sqrt{M_w^2+0.75M_n^2}$ 第四强度理论计算弯矩

$$W=\frac{1}{2}F\delta$$

F 广义力，δ 广义位移

$$F_0\Delta_i=\int_l\frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI}\mathrm{d}x$$

$F_0=1$（图像瞬间解决理解问题，这里均指广义量）

$\int_l M(x)\bar{M}(x)\mathrm{d}x=\int_l M(x)x\tan\alpha\mathrm{d}x\rightarrow$

$\tan\alpha\int_l M(x)x\mathrm{d}x=\tan\alpha\cdot\omega\cdot x_C=\omega\bar{M}_C$

$\Delta_i=\frac{\omega\bar{M}_C}{EI}$

ω 弯矩图面积，$\bar{M}_C$ 弯矩图的形心对应的 $\bar{M}$ 图的高度

常用 A 一次，B 二次开口上，C 二次开口下

$$\begin{array}{lll}A=bh/2 & A=bh/3 & A=2bh/3\\C=b/3 & C=b/4 & C=3b/8\end{array}$$

$$\delta_n=\frac{\partial U}{\partial P_n}$$

还是图像，自然知道只有当弹性系统为线性，即其位移与荷载成线性关系时，才能应用卡氏定理（在必要时求某点位移可以先设一个力算出解析式之后再用 0 代入，先偏导，后积分）

$$F_1\delta_{12}=F_2\delta_{21}$$

利用图像更好看出来，位移互等定理

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1\mathrm{P}}=\Delta_1$$

力法正则方程，还是用图像知道原理，δ_{11} 单位力引起沿着 X_1 的位移动载荷这里看点例题就是了（但是需要看）。分别匀速直线运动、竖直冲击、水平冲击动载荷系数（角标 j 为静，d 为动）

$$K_d=1+\frac{a}{g}\quad K_d=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_j}}$$

$$K_d=\sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_j}}\quad\sigma_d=K_d\sigma_j$$

循环特征 $r=\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$

S-N 强度曲线

临界载荷一般公式 $P_{\mathrm{cr}}=\frac{n^2\pi^2EI}{\mu l^2}$

临界应力 $\sigma_{\mathrm{cr}}=\frac{\pi^2E}{\lambda^2}$

柔度（长细比）$\lambda=\frac{\mu l}{i}$，$i=\sqrt{\frac{I}{A}}$

那么最小临界载荷必然是 $P_{\mathrm{cr}}=\frac{\pi^2EI_{\min}}{\mu l^2}$

一端自由,一端固定: $\mu=2.0$ 一端铰支,一端固定: $\mu=0.7$ 两端固定: $\mu=0.5$ 两端铰支: $\mu=1.0$ 大柔度杆（细长压杆）欧拉公式适用范围 $\lambda\ge\lambda_p=\sqrt{\frac{\pi^2E}{\sigma_{\mathrm{p}}}}$,中柔度杆 $\lambda_{\mathrm{s}}=\frac{a-\sigma_{\mathrm{s}}}{b}$ 有 $\lambda_{\mathrm{s}}<\lambda<\lambda_{\mathrm{p}},\sigma_{\mathrm{s}}<\sigma<\sigma_{\mathrm{p}}$, 小柔度杆（粗短杆）$\sigma_{\mathrm{cr}}=\sigma\mathrm{s}$,$\sigma=\frac{N}{A}\le[\sigma]$, $\lambda\le\lambda_{\mathrm{s}}$，$\sigma\ge\sigma_{\mathrm{s}}$

直线形经验公式 $\sigma_{\mathrm{cr}}=a-b\lambda$ 然后就是那个欧拉公式图