

第二章 流体及其物理性质:

1. 连续介质假设: 研究宏观现象 —— 统计平均值.

⇒ 对于物理量 A , 有 $A(\vec{r}, t)$

2. 流体适用条件: 粒子自由程 $\ll$ 特征长度; 热力学平衡态

3. 流体作用力:

① 表面力: 流体微元上表面受力: $\delta \vec{F} \begin{cases} \delta \vec{F}_n \\ \delta \vec{F}_\tau \end{cases}$

取一点微面积: δA .

表面力 (应力): $\vec{P}_n = \frac{\delta \vec{F}}{\delta A} \begin{cases} \frac{\delta \vec{F}_n}{\delta A} = (\vec{P}_n)_n \\ \frac{\delta \vec{F}_\tau}{\delta A} = (\vec{P}_n)_\tau \end{cases}$

$\delta F_n \propto \delta A \Leftrightarrow \delta \vec{F}_n = \vec{P}_n \delta A$

② 质量力: 某力场作用在流体质点 (体积) 上的力. $\Rightarrow \vec{F}_m \propto m$

* 表面力由取得的流体元以外的流体对其的作用力.
 质量力 (体积力) 由外加力场 (重力场/电磁场) 产生.

4. 流体密度:

① $\rho = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta m}{\delta V} = \frac{dm}{dV}$. (一般流体)

$\rho_0 = \frac{m}{V}$ (均匀流体)

无量纲

② 相对密度: ($T=4^\circ\text{C}$ 水的密度的比值)

$d = \frac{\rho_i}{\rho_w}$

③ 混合气体密度: $\rho = \sum_{i=1}^n \alpha_i \rho_i$ (权重法)

5. 流体的压缩性与膨胀性: $\kappa = \frac{\delta p/p}{\delta p}$ (负号是因为 δp 与 δV 反号, 加压导致压缩)

① 压缩系数: $\kappa = - \frac{\delta V/V}{\delta p}$

② 体积模量: $K = \frac{1}{\kappa} = - \frac{\delta p}{\delta V/V}$

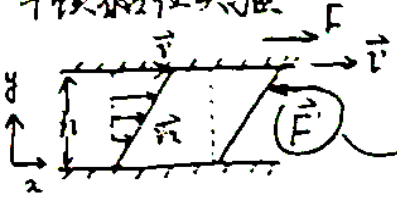
③ 体胀系数: $\alpha_V = \frac{\delta V/V}{\delta T}$

④ 考虑 p, T 同时影响流体的 $p(V)$: $pV = RT / \frac{p}{\rho} = RT$

(相对滑移)

6. 流体的黏性: 流球微元(相对运动中产生切向阻力)

牛顿黏性实验:



V_x 呈现线性分布

即速度梯度 $\frac{V}{h} = \text{常数}$

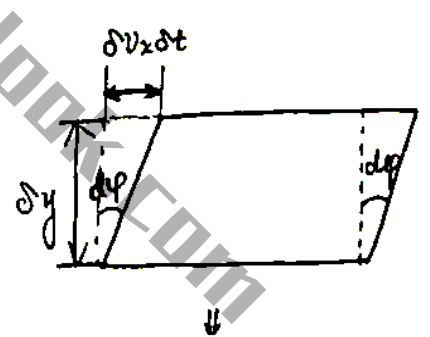
内摩擦 (黏性体现)

$$F = F' = \frac{\mu A V}{h}$$

μ (Pa·s): 动力黏度

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{\mu V}{h}$$

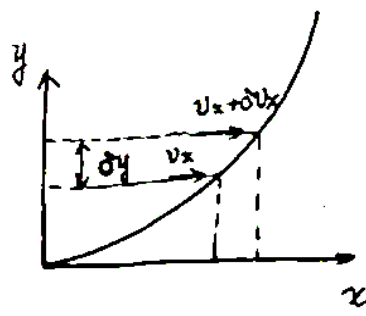
$\mu = \rho \nu$, ν (m²/s) 运动黏度



角形速度: $d\phi \rightarrow 0$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\tan(d\phi)}{dt} = \frac{dV_x dt / dy}{dt} = \frac{dV_x}{dy}$$

角形速度为梯度速度



ii) V_x 不是线性分布

某点速度梯度: $\frac{\delta V_x}{\delta y}$

$$\Rightarrow \text{极限: } \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{\delta V_x}{\delta y} = \frac{dV_x}{dy}$$

$\Rightarrow$ 牛顿内摩擦定律:

$$\tau = \mu \frac{dV_x}{dy}$$

iii) 黏度大小 { 气体: $\propto$ 温度, $\propto$ 压力.
液体: $\propto$ 温度, $\propto$ 压力.

iv) 气体动力黏度: $\mu = \mu_0 \frac{273+S}{T+S} \left(\frac{T}{273}\right)^{\frac{3}{2}}$

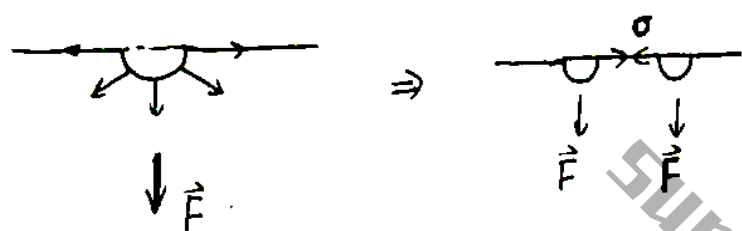
(T=0°C)

混合气体动力黏度: $\mu = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i M_i^{\frac{1}{2}} \mu_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i M_i^{\frac{1}{2}}}$

待测液体的运动黏度: $\nu = 0.0731 E^{-0.631/E}$
 $E = \frac{\eta}{E}$ (cm²/s)

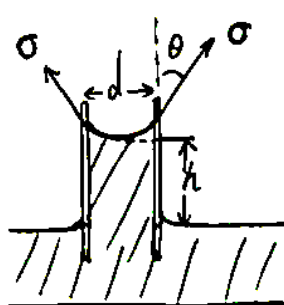
7. 流体的表面性质:

① 表面张力 σ (N/m): $\sigma_{\text{液体}} \propto \text{温度}$

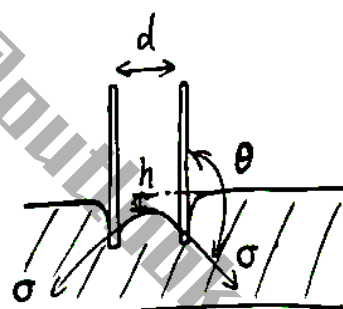


② 毛细现象:

i) 毛细管实验:

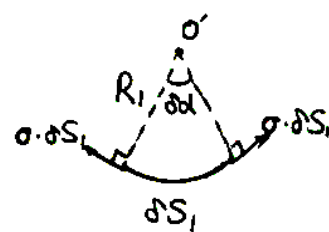
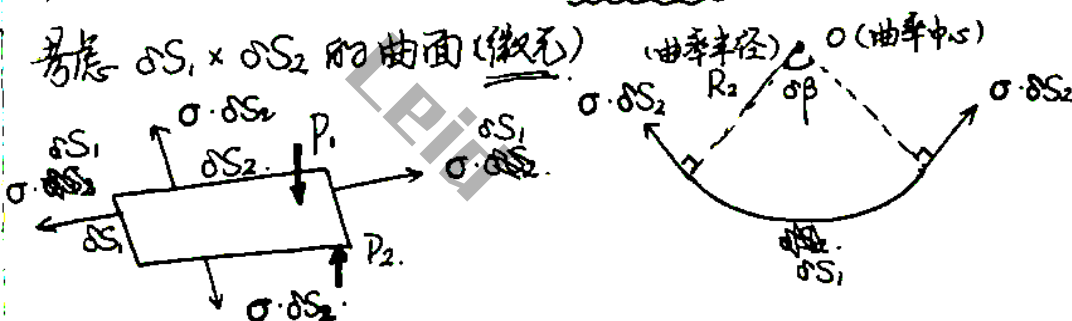


水上升: 附着力 > 内聚力.



水银下降: 附着力 < 内聚力.

ii) 曲面液面的压力差: $\Delta P = P_1 - P_2$ ($P_{\text{内}} > P_{\text{外}}$: 张力作用)



微元下: $\delta\beta \rightarrow 0$. $\sin \delta\beta \approx \delta\beta \approx \frac{\delta S_{\beta 1}}{R_2}$ $\left| \sin(\frac{1}{2}\delta\beta) \approx \frac{\frac{1}{2}\delta S_{\beta 1}}{R_2} \right|$ $\left| \sin(\frac{1}{2}\delta\alpha) = \frac{\frac{1}{2}\delta S_{\alpha}}{R_1} \right|$

曲面受力平衡: $(P_1 - P_2) \delta S_1 \delta S_2 = 2 \left[\sigma \delta S_2 \sin(\frac{1}{2}\delta\beta) + \sigma \delta S_1 \sin(\frac{1}{2}\delta\alpha) \right]$

$\Rightarrow \Delta P \cdot \delta S_1 \delta S_2 = \sigma \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \delta S_1 \delta S_2$

$\Rightarrow \Delta P = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ 对球形流体团 $\Delta P = \frac{2\sigma}{R}$ ($P_{\text{内}} > P_{\text{外}}$)

iii) 毛细管高度: $\pi d \sigma \cos\theta = \rho g h \cdot \frac{1}{4} \pi d^2$

$\Rightarrow h = \frac{4\sigma \cos\theta}{\rho g d}$

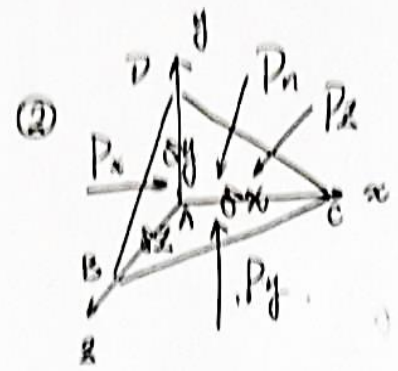
第三章 流体力学: (对于理想/粘性流体均适用)

静止: $\begin{cases} \tau = \mu \frac{du_x}{dy} = 0 \\ \vec{p}_{nn} = \frac{d\vec{f}_n}{dA} = -p\vec{n} \\ p_x = p_y = p_z = p_n \end{cases}$

1. 流体静压强:

① $\vec{p}_{nn} = \frac{d\vec{f}_n}{dA} = -p\vec{n}$ (法向应力, 指向作用面内法线方向)

$\Leftrightarrow$ 没有 $\vec{p}_{nc} \Leftrightarrow$ 流体不表现粘性 $\Leftrightarrow$ 流体处于静止(相对静止)状态



$dm = \frac{1}{6} \rho \delta x \delta y \delta z \Rightarrow$ 质量力三分量 $\begin{cases} dm f_x \\ dm f_y \\ dm f_z \end{cases}$

x方向的力平衡方程

$p_x \cdot \frac{1}{2} \delta y \delta z - p_n \cdot S_{\triangle BDC} \cdot \cos(\vec{p}_n, x) + f_x dm = 0$

$\Rightarrow p_x \cdot \frac{1}{2} \delta y \delta z - p_n \cdot \frac{1}{2} \delta y \delta z + f_x dm = 0$

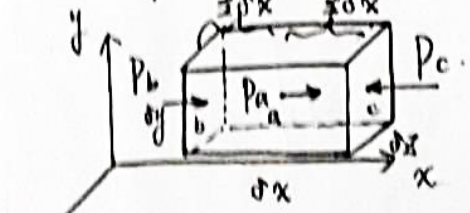
表面力二阶小量 $\xrightarrow{\text{质量力三阶小量}}$ 略去 $f_x dm$ 后: $\boxed{p_x = p_n}$

同理 $\Rightarrow \boxed{p_x = p_y = p_z = p_n}$

由于流体微元在空间是任取的, 因此静压强与作用面空间方位, 只是空间坐标的函数: $(p(x, y, z))$

$\Rightarrow$ 静压强为标量函数(作用面任取不影响): $dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$

2. 流体平衡方程:



沿 x 方向平衡:

$(p_a - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \delta x) \cdot \frac{1}{2} \delta y \delta z + \rho \delta x \delta y \delta z f_x - (p_a + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \delta x) \cdot \frac{1}{2} \delta y \delta z = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} f_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ f_y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ f_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\nabla p = \rho \vec{f}}$
静压强 质量力

Taylor 展开: $p_b = p_a - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \delta x$
 $p_c = p_a + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \delta x$

Euler 方程:
表征单位质量流体上的
质量力与静压力平衡关系

3. 重力场中的流体平衡: (z 方向上仅有 $-g$)

① 均质、不可压缩流体静力学基本方程:

$$\begin{cases} f_x = 0, f_y = 0, f_z = -g. \\ p(x, y, z) \Rightarrow dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz. \xrightarrow{\vec{F} = \frac{1}{\rho} \nabla p} dp = -\rho g dz. \end{cases}$$

$$\Rightarrow dz + \frac{dp}{\rho g} = 0 \xrightarrow{\text{积分}} \boxed{z + \frac{p}{\rho g} = C} \quad \text{或} \quad \boxed{z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}}$$

静力学基本方程.

② 物理意义:

$$z + \frac{p}{\rho g} = C \quad \text{总势能 (不变量)}$$

$\downarrow$ 位势能 $\downarrow$ 压强势能

理解 $\frac{p}{\rho g}$ 作为势能:  $h = \frac{p}{\rho g}$.

仅有重力作用的
连续均质静流体
的总势能不变.

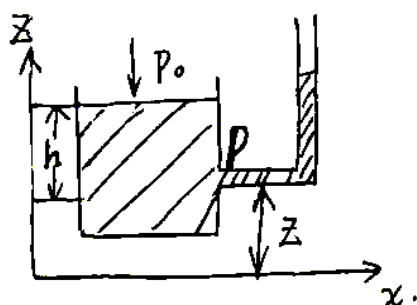
③ 几何意义:

用液柱高度来指代流体所具的能量: (水头)

$$\begin{cases} z: \text{位置水头} \\ \frac{p}{\rho g}: \text{压强水头} \end{cases} \Rightarrow C: \text{静水头} \Rightarrow \text{由 } dz + \frac{dp}{\rho g} = 0, \text{ 令 } dp = 0 \Rightarrow \underline{dz = 0}$$

$\Rightarrow$ 重力作用下的连续均质静流体, 静水头线为水平线

重力作用下: $\underbrace{\text{自由表面压强}}_{(p_0)} + \underbrace{\text{淹没压强}}_{(\rho g h)} = \underbrace{\text{任一点静压强}}_{(p)}$



$$\text{由 } z + \frac{p}{\rho g} = (z+h) + \frac{p_0}{\rho g}$$

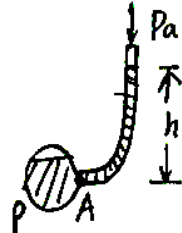
$$\Rightarrow \boxed{p = p_0 + \rho g h}$$

$\Rightarrow$ 推论: 任点都受到自由表面处压强的影响.
 $\Rightarrow$ 压强在流体中传递

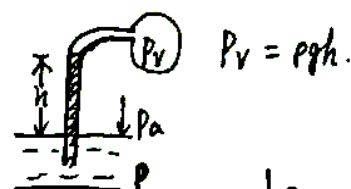
帕斯卡原理

4. 液柱式测压计:

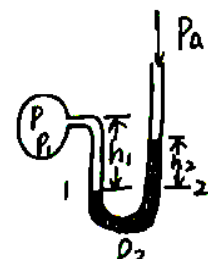
① 测压管: (测小压强) $\begin{cases} \text{测表压: } p_e = pgh \\ \text{测真空: } p_v = pgh. \end{cases}$



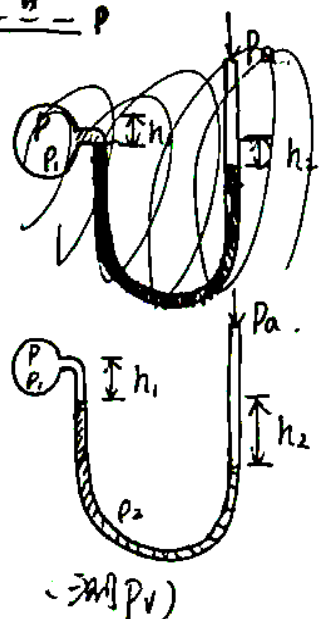
$$p_{Ae} = pgh$$



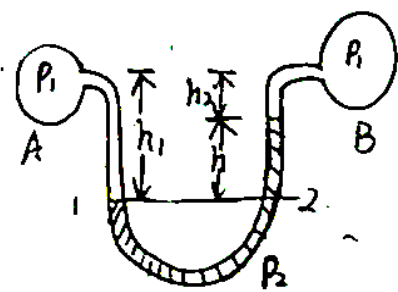
② U形管测压计: (测较大压强) $\begin{cases} \text{测表压: } p_e = p_2gh_2 - p_1gh_1 \\ \text{测真空: } p_v = p_2gh_2 + p_1gh_1 \end{cases}$



(测 p_e)

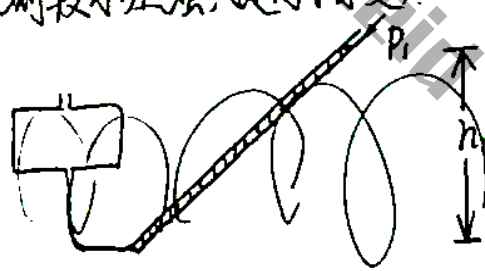


③ U形管压差计: (测容器两处压差) $\Delta p = (p_2 - p_1)gh$



利用 $p_1 = p_2$ 即可求 $\Delta p = p_A - p_B = (p_2 - p_1)gh$

④ 倾斜微压计: (测较小压强, 提高精度)



质量守恒:

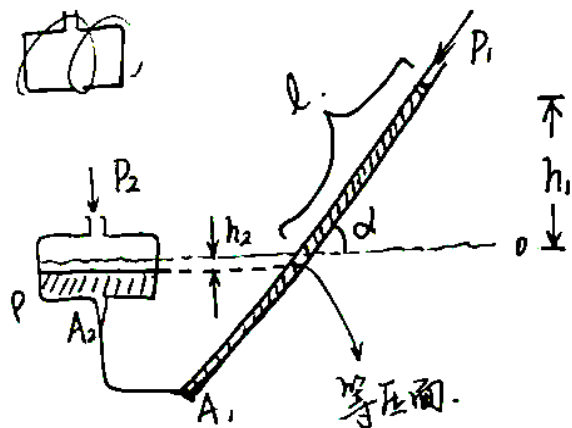
$$p \cdot A_2 h_2 = p \cdot h_1 \cdot \frac{A_1}{\sin \alpha} = p \cdot l \sin \alpha \cdot \frac{A_1}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{l A_1}{A_2}$$

$$\Rightarrow \Delta h = h_1 + h_2 = l (\sin \alpha + \frac{A_1}{A_2})$$

$$\Rightarrow \text{压强差: } \Delta p = p_2 - p_1 = p g \Delta h = p g l (\sin \alpha + \frac{A_1}{A_2}) = k l$$

$k = p g (\sin \alpha + \frac{A_1}{A_2})$ 微压计系数
由 α 变化决定



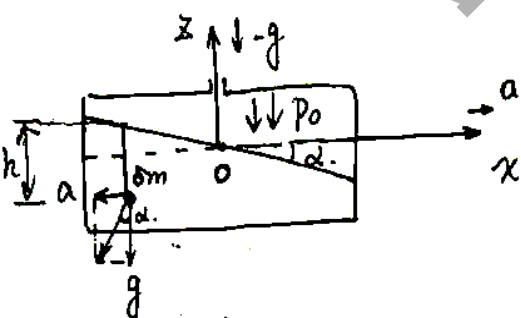
⑤ 补偿式微压计: 见书 P29 面 (更精确)

$$\Delta p = p g \Delta h$$

Δh 为由调节仪器读出到使确定

第五节 液体的相对平衡: (质量力中多加一惯性力)

① 水平直线等加速运动: ($f_x = -a$)



$$f_x = -a; f_y = 0; f_z = -g$$

$$\Rightarrow dp = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz) = \rho(-a dx - g dz)$$

积分 $\Rightarrow p = \rho(-ax - gz) + C$

由 $x=0, z=0$ 处压强保持 p_0 不变: $C = p_0$

$$\Rightarrow \boxed{p = \rho(-ax - gz) + p_0} \quad \boxed{\text{静压强分布}} = \rho gh + p_0$$

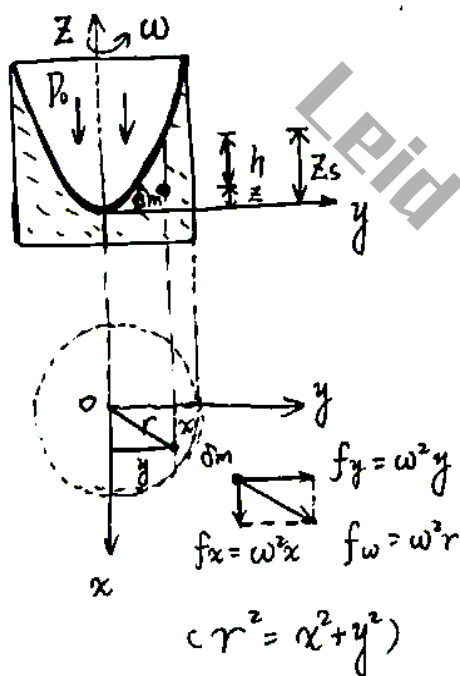
由 $dp=0 \Rightarrow a dx + g dz = 0 \Rightarrow \boxed{ax + gz = C}$ 等压面方程

$$\boxed{\alpha = -\arctan\left(\frac{a}{g}\right)}$$

等压面与质量力合力垂直

一簇斜平面

② 等角速度旋转液体: ($f_w = \omega^2 r$)



$$f_x = \omega^2 x; f_y = \omega^2 y; f_z = -g$$

$$\Rightarrow dp = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz)$$

$$= \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz)$$

积分 $\Rightarrow p = \rho\left(\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 y^2 - gz\right) + C$

由 $r=0, z=0, p=p_0 \Rightarrow C = p_0$

$$\Rightarrow \boxed{p = \rho g\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z\right) + p_0} = \rho gh + p_0$$

由 $dp=0 \Rightarrow \cancel{\omega^2 x dx + \omega^2 y dy} - g dz = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - gz = C}$$
 等压面为一簇绕 z 轴的旋转抛物面

令 $r=0, z=0, C=0 \Rightarrow$ 自由液面方程: $\boxed{\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - gz = 0}$

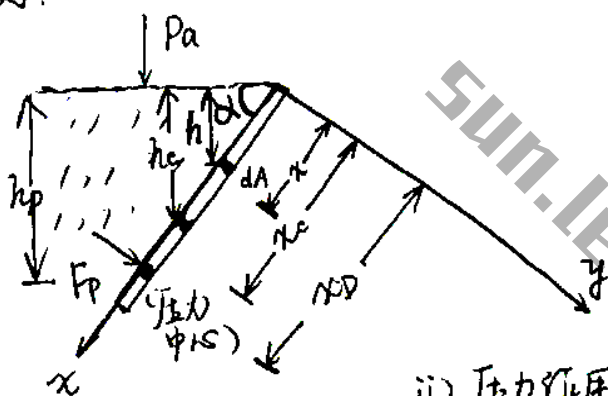
或 $\boxed{z_s = \frac{\omega^2 r^2}{2g}}$

第六节 静止液体作用于平面的总压力:

仅由液体产生的压力.

① 水平面: $F_p = p_c A = \rho g h A$.

② 一般平面:



i) 压力大小: $dF_p = p_c dA = \rho g h dA = \rho g x \sin \alpha dA$.

$$\Rightarrow F_p = \int_A dF_p = \rho g \sin \alpha \int_A x dA$$

$$\Rightarrow \boxed{F_p = \rho g x_c \sin \alpha A = \rho g h_c A}$$

静矩: $S_y = x_c A = \int_A x dA$

ii) 压力作用点: (压力中心):

$$\text{对 } O_y \text{ 轴作矩: } F_p x_D = \int_A dF_p x$$

$$\Rightarrow \rho g x_c \sin \alpha A \cdot x_D = \rho g \sin \alpha \int_A x^2 dA$$

$$\Rightarrow x_D = \frac{I_y}{x_c A}$$

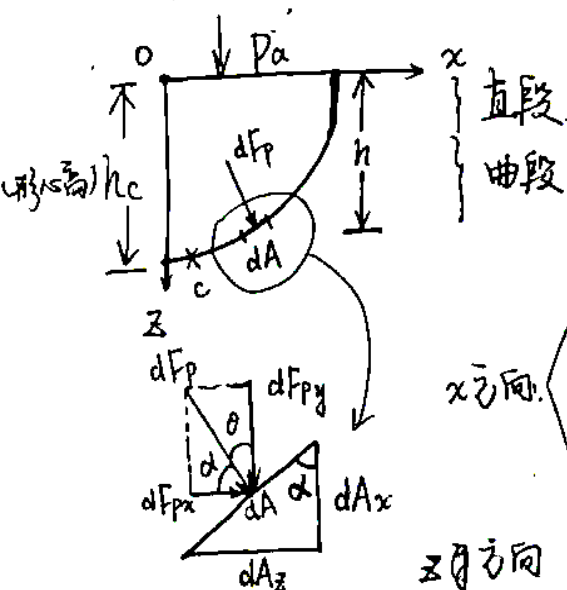
平行移轴定理:

$$I_y = I_{cy} + x_c^2 A \Rightarrow \boxed{x_D = x_c + \frac{I_{cy}}{x_c A}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_D = \frac{I_{xy}}{x_c A} = y_c + \frac{I_{cxy}}{x_c A}}$$

惯性矩: $I_y = \int_A x^2 dA$

第七节 静止液体作用于曲面的总压力:



$dF_p = \rho g h dA$. (总压力微元)

$$dF_{px} = \rho g h dA \cos \alpha = \rho g h dA_x$$

$$dF_{pz} = \rho g h dA \sin \alpha = \rho g h dA_z$$

$$\boxed{F_{px}} = \int_{A_x} \rho g h dA_x = \rho g \int_{A_x} h dA_x = \rho g h_c A_x$$

F_{px} 作用点为 A_x (投影面) 的压力中心.

$$\boxed{F_{pz}} = \int_{A_z} \rho g h dA_z = \rho g \int_{A_z} h dA_z = \rho g V_p$$

F_{pz} 作用点过压力体重心 (液体重力提供 F_{pz}).

压力体: 曲面为底, 高为 h 的液体体积.

总压力: $F_p = \sqrt{F_{px}^2 + F_{pz}^2}$; $\theta = \arctan \frac{F_{px}}{F_{pz}}$; 作用点由 F_{px} , F_{pz} 作用线 + θ 确定

第四章 流体运动学和动力学:

一. 描述方法:

① Euler方法

$$\vec{v}(x, y, z, t) \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{当地加速度}(\vec{v})} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}}_{\text{迁移加速度}(\vec{v})}$$

② Lagrange方法:

$$\vec{v}(a, b, c, t) \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2} = \vec{a}$$

二. 流动分类:

定常流动: 流动参量不随时间变化.
非定常流动: 流动参量随时间变化.

一维流动: $\vec{v}(x)$
二维流动: $\vec{v}(x, y)$
三维流动: $\vec{v}(x, y, z)$

三. 迹线 & 流线:

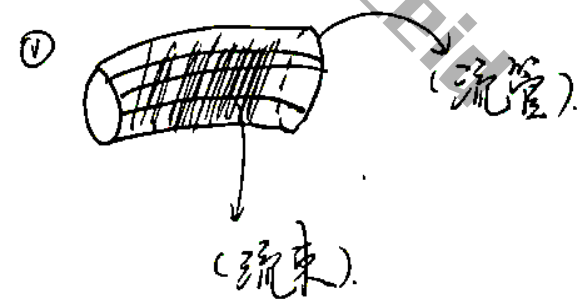
迹线: 流体质点的运动轨迹.

流线: (Euler method): 流场中 t 时刻流体速度 $\vec{v}$ 与之相切.

流线方程: $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$ ($d\vec{r} \times \vec{v} = 0$)

定常流动: 迹线 = 流线.

四. 流管 & 流束 & 流量 & 水力半径. (P57)



② 流量:
$$\begin{cases} Q_m = \int_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} \\ Q_v = \int_A \vec{v} \cdot d\vec{A} \end{cases}$$

平均流速
$$v_a = \frac{Q_v}{A}$$

③ 湿周 $\chi = \frac{A}{R_h}$

总流有效截面积.

水力半径.

五. 输运公式: (P59面)

描述系统内物理量随时间变化率: $(\frac{d}{dt})$

控制体内该物理量随时间变化率 $(\frac{\partial}{\partial t})$ 与经过控制面净通量 $(\int_A)$.

$$\Rightarrow N = \int_V \eta \rho dV \Rightarrow \frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \eta \rho dV + \int_{CS} \eta \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

某流体物理量. 单位质量流体具有的物理量.

定常流动: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\frac{dN}{dt} = \int_{CS} \eta \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

六. 连续方程:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \eta \rho dV + \iint_{CS} \eta \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

$$N=m; \eta=1$$

$$\Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{dN}{dt} = 0$$

$$\text{连续方程: } \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \eta \rho dV + \int_{CS} \eta \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0 \right]$$

$$\Rightarrow \text{定常流动: } \int_{CS} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{A_1} \rho \vec{v}_1 \cdot d\vec{A}_1 = \int_{A_2} \rho \vec{v}_2 \cdot d\vec{A}_2 \Rightarrow \boxed{\rho v_a A = C}$$

↓
截面平均流速

七. 动量方程: (动量矩方程)

本质是 $\vec{F} = m\vec{a}$

$$\eta = \vec{v}, N = \int_V \vec{v} \rho dV$$

$$\Rightarrow \text{动量方程: } \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \rho \vec{f} dV + \int_S \vec{p}_n \cdot d\vec{A}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \vec{v} dV + \int_{CS} (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \text{定常流动: } \int_{CS} \rho v_n \vec{v} dA = \int_{CV} \rho \vec{f} dV + \int_{CS} \vec{p}_n \cdot d\vec{A}$$



$$\text{动量矩方程: } \eta = \vec{r} \times \vec{v}, N = \int_V \vec{r} \times \vec{v} \rho dV$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{r} \times \vec{v} \rho dV + \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_{CV} \vec{r} \times \vec{f} \rho dV + \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{p}_n) \cdot d\vec{A} \right]$$

$$\Rightarrow \text{定常流动: } \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_{CV} \vec{r} \times \vec{f} \rho dV + \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{p}_n) \cdot d\vec{A}$$

八. 能量方程:

$$\eta = u + \frac{v^2}{2} \quad (\text{热力学能} + \text{动能}) \quad N = \int_V (u + \frac{v^2}{2}) \rho dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho (u + \frac{v^2}{2}) dV + \underbrace{\int_{CS} \rho (u + \frac{v^2}{2}) \vec{v} \cdot d\vec{A}}_{\text{系统的量变化率}} = \underbrace{\int_{CV} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV}_{\text{质量力功率}} + \underbrace{\int_{CS} \vec{P}n \cdot \vec{v} dA}_{\text{表面力功率}} + \underbrace{\dot{Q}}_{\text{换热量}}$$

$$\begin{cases} u = c_v T & \text{定比热气体} \\ \dot{Q} = 0 & \text{绝热流} \\ \eta = u + \frac{v^2}{2} + gz & \text{加入重力作用} \end{cases}$$

九. 伯努利方程:

重力作用下不可压缩理想流体定常一维绝热流:

$$\Rightarrow \left| \frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = C \right|$$

(动能 + 位势能 + 压强势能 = 定值)

$$\text{单位重量关系式: } \left| \frac{v^2}{2g} + Z + \frac{P}{\rho g} = H \right|$$

$\downarrow$ 速度水头 (动能) $\downarrow$ 位置水头 (位能) $\downarrow$ 压强水头 (压强)

皮托管 (P69面)
文丘里管:

十. 黏性流体总流的伯努利方程:

$$\underbrace{\alpha_1}_{\text{动能修正系数}} \frac{v_{1a}^2}{2g} + Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} = \frac{\alpha_2 v_{2a}^2}{2g} + Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + h_{lw}$$

截面1至2单位重量流体的能量损失

第五章 相似原理和量纲分析:

一 力学相似 (需要几何相似)

① 几何相似: $\frac{l'}{l} = k_l$ (模型/原型)
 特征长度/比较尺长度

⇒ $\begin{cases} \text{面积比例尺 } k_A = \frac{A'}{A} = \frac{l'^2}{l^2} = k_l^2 \\ \text{体积比例尺 } k_V = \frac{V'}{V} = \frac{l'^3}{l^3} = k_l^3 \end{cases}$

② 运动相似: $\frac{v'}{v} = k_v$

⇒ $\begin{cases} k_t = \frac{t'}{t} = \frac{l'/v'}{l/v} = \frac{k_l}{k_v} \\ k_a = \frac{a'}{a} = \frac{v'/t'}{v/t} = \frac{k_v}{k_t} = \frac{k_v^2}{k_l} \\ k_{qv} = \frac{q_v'}{q_v} = \frac{l'^3/t'}{l^3/t} = \frac{k_l^3}{k_t} = k_l^2 k_v \\ k_\nu = \frac{\nu'}{\nu} = \frac{l'^2/t'}{l^2/t} = \frac{k_l^2}{k_t} = k_l k_v \\ k_\omega = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{k_v}{k_l} \end{cases}$

所有运动学比例尺
均可由 k_v, k_l 表示

③ 动力相似:

$\frac{F_p'}{F_p} = \frac{F_\tau'}{F_\tau} = \frac{W'}{W} = \frac{F_i'}{F} = k_F$
 ↓ ↓ ↓ ↓
 总压力 切向力 重力 惯性力

④ 几何相似 + 运动相似 + 动力相似:

⇒ 密度比例尺: $k_\rho = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{F_i'/(a'V')}{F_i/(aV)} = \frac{k_F}{k_a k_v} = \frac{k_F}{k_l^2 k_v^3}$

⇒ 用 k_ρ, k_l, k_v 作基本比例尺:
 (ρ, l, v 独立变量):

$\begin{cases} k_F = k_\rho k_l^2 k_v^2 \\ k_M (\text{力矩}) = k_\rho k_l^3 k_v^3 \\ k_{p_{qv}} = k_\rho k_v^2 \\ k_P (\text{功率}) = k_\rho k_l^2 k_v^3 \\ k_M (\text{动量}) = k_\rho k_l k_v \end{cases}$

⇒ 所有动力学量比例尺
均可由 k_ρ, k_l, k_v 确定

二. 动力相似准则:

牛顿数 Ne ($\frac{\text{作用力}}{\text{惯性力}}$)	$Ne = \frac{F}{\rho l v^2}$	(动力相似 $\Leftrightarrow Ne$ 相等)
弗劳德数 ($\frac{\text{惯性力}}{\text{重力}}$)	$Fr = \frac{v}{(gl)^{\frac{1}{2}}}$	(重力相似 $\Leftrightarrow Fr$ 相等)
雷诺数 Re ($\frac{\text{惯性力}}{\text{粘滞力}}$)	$Re = \frac{\rho v l}{\mu}$	(粘滞力相似 $\Leftrightarrow Re$ 相等)
欧拉数 ($\frac{\text{总压力}}{\text{惯性力}}$)	$Eu = \frac{P}{\rho v^2}$	(压力相似 $\Leftrightarrow Eu$ 相等)
斯特劳哈尔数 (定常流动)	$Sr = \frac{l}{vt}$	(定常流动相似 $\Leftrightarrow Sr$ 相等)
韦伯数 ($\frac{\text{惯性力}}{\text{张力}}$)	$Wb = \frac{\rho v^2 l}{\sigma}$	(表面张力相似 $\Leftrightarrow Wb$ 相等)

三. 流动相似条件: (6条, P85面)

四. 量纲分析法.

1. 对控制方程的无量纲化: $\rightarrow$ 为了更方便描述各条件 (不同边界条件, 不同尺寸相似) 下流动情况, 增加通用性.

eg. 2D 不可压缩 N-S 方程:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$\downarrow$ (参考量 p_0 (压力); V (速度); L (长度); τ (时间))

$$u^* = \frac{u}{V}, \quad v^* = \frac{v}{V}; \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}; \quad t^* = \frac{t}{\tau}; \quad p^* = \frac{p}{p_0}$$

$\Rightarrow$ 无量纲化方程:

$$\underbrace{\frac{\rho V}{\tau}}_{\text{当地惯性力 (非定常)}} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \underbrace{\frac{\rho V^2}{L}}_{\text{定常惯性力}} \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = \underbrace{\rho f_x}_{\text{体积力}} - \underbrace{\frac{p_0}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*}}_{\text{压力}} + \underbrace{\frac{\mu V}{L^2}}_{\text{粘性力}} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

两边同除 $\frac{\rho V^2}{L}$
 $\Rightarrow$ 体积力换为重力

含各无量纲数的方程 (即实现动力相似准则后):

$$Sr \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = \frac{1}{Fr^2} - Eu \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + Re \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

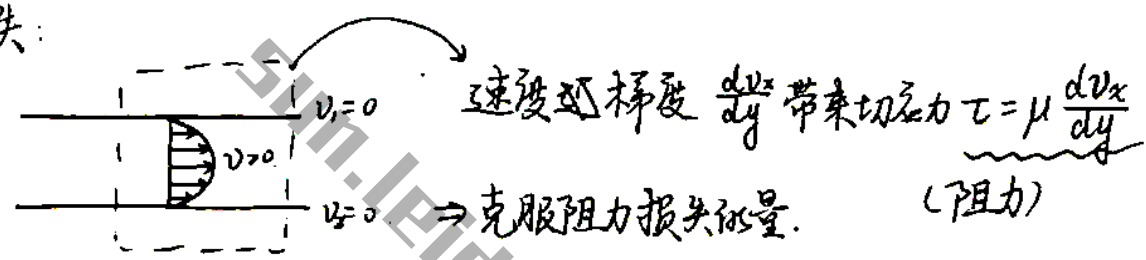
$\rightarrow$ 无量纲数的数值大小对流动有很大影响: 改变控制方程的重要因素.

第六章 管内流动与水力计算:

- 连续方程
- 动量方程
- 能量方程

一. 管内流动的能量损失:

黏性流体在管内:



$\Rightarrow$ 两部分能量损失: (单位重量流体)

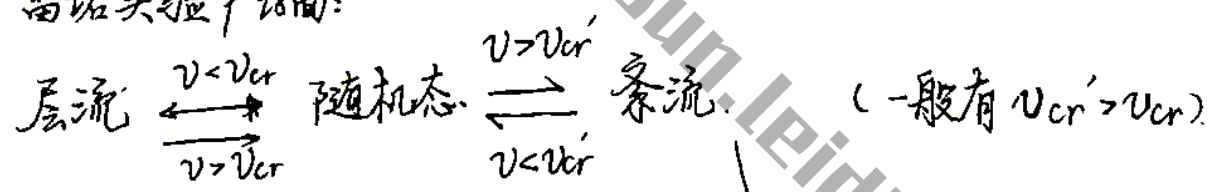
沿程损失系数 (实验测) $h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$ 沿程损失 (缓变流黏滞力损失)

局部损失系数 (实验测) $h_j = \zeta \frac{v^2}{2g}$ 局部损失 (急变流: 碰撞, 涡流等)

$\Rightarrow$ 全管道: $h_w = \sum h_f + \sum h_j$ (分段)

二. 黏性流体两种流动状态: { 层流 (流均呈一^簇平行线) 紊流 }

* 雷诺实验 P98面:



$h_f = k v^m$ (k, m 由实验确定)

$\Leftarrow$ { $v < v_{cr} : m = 1$
 $v > v_{cr}' : m = 1.75 \sim 2$

工程中判别流动状态
 临界雷诺数 $Re_{cr} = \frac{\rho v_{cr} l}{\mu}$

一般 $Re > 2000$ 为湍流.

三. 管道进口段流动:

① 边界层概念:



固体壁面附近 $v \rightarrow 0$
总流速度 $v \rightarrow 0$

$\frac{\partial v}{\partial r}$ 很大, 黏性不可忽略

远离壁面: $\frac{\partial v}{\partial r}$ 不明显, 黏性可忽略

② 进口段: 边界层相交所管道长度

边界层 (黏性区) 阻碍部分流体流动

连续方程 $VA=C$
流量一定 $\rightarrow$ 总流流速增大

$\rightarrow$ 速度分布改变直至边界层相交 (完全发展流动)

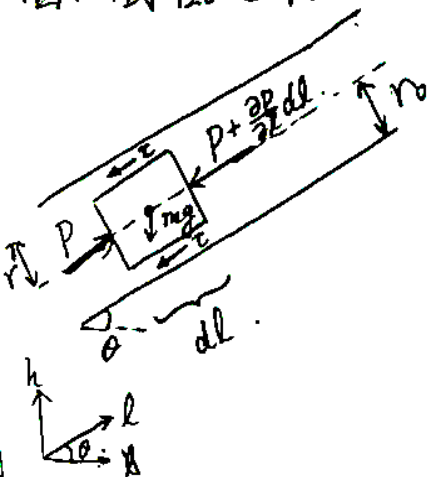
(非均匀流动 $\rightarrow$ 均匀流动)

层流进口段长度 ($Re < Re_{cr}$) $L^* = 0.058 d Re$

湍流进口段长度 ($Re > Re_{cr}$ & Re 很大) $L^* = 25 \sim 40 d$

note: 湍流情况下进口段长度一般快于层流, L^* 更小.

四. 圆管流体层流流动:



一般圆管中流体, 受力平衡:

(不可压缩、定常流、黏性层流)

$$\begin{cases} (P + \frac{\partial P}{\partial l} dl) \pi r^2 + \tau \cdot 2\pi r dl + \rho \pi r^2 dl g \sin \theta = P \pi r^2 \\ \sin \theta = \frac{dh}{dl} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tau = -\frac{r}{2} \frac{d}{dl} (P + \rho gh)$$

$$\text{由 } \tau = -\mu \frac{dv}{dr}$$

$$v|_{r=r_0} = 0$$

$$\Rightarrow v(r) = \frac{r^2 - r_0^2}{4\mu} \frac{d}{dl} (P + \rho gh)$$

圆管层流中流体速度分布 (径向) 呈抛物面形分布.

$$v(r) = \frac{r^2 - r_0^2}{4\mu} \frac{d}{dl} (p + \rho gh)$$

① 水平放置圆管, $\frac{dh}{dl} = 0$, $\frac{dp}{dl} = -\frac{\Delta p}{l}$ Δp 表示压降 $p_1 - p_2$
 则 $\frac{dp}{dl} = \frac{p_2 - p_1}{L_2 - L_1} = \frac{p_2 - p_1}{l} = -\frac{\Delta p}{l}$

$$v(r) = -\frac{(r^2 - r_0^2)\Delta p}{4\mu l} = \frac{\Delta p}{4\mu l} (r_0^2 - r^2)$$

水平圆管层流



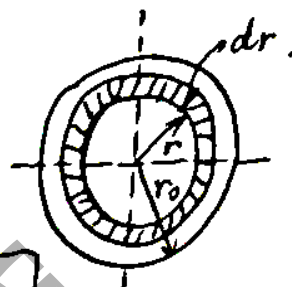
$r = r_0$ 时, $v(r) = 0$ (固体壁面不滑动)

$$r = 0 \text{ 时, } v_{\max} = \frac{\Delta p r_0^2}{4\mu l}$$

流量 $Q_v = \int dQ_v = \int_0^{r_0} 2\pi r dr \cdot v = \int_0^{r_0} 2\pi r \cdot \frac{\Delta p}{4\mu l} (r_0^2 - r^2) dr$

$$= \frac{\pi \Delta p r_0^4}{8\mu l} \text{ 或 } \frac{\pi \Delta p d^4}{128\mu l}$$

$$\Rightarrow \text{平均流速 } \bar{v} = \frac{Q_v}{\pi r_0^2} = \frac{\Delta p r_0^2}{8\mu l} = \frac{v_{\max}}{2}$$



圆管截面流量

$$dQ_v = \frac{2\pi r dr \cdot v dt}{dt}$$

$$\tau(r) = -\mu \frac{dv}{dr} = \frac{\Delta p r}{2l}$$

切应力在径向呈线性分布

② 一般位置圆管:

$$\begin{cases} v(r) = \frac{r^2 - r_0^2}{4\mu} \frac{d}{dl} (p + \rho gh) \\ \bar{v} = \frac{-r_0^2}{8\mu} \frac{d}{dl} (p + \rho gh) = -\frac{1}{2} v_{\max} \\ Q_v = \frac{-\pi r_0^4}{8\mu} \frac{d}{dl} (p + \rho gh) \\ \tau(r) = -\frac{r}{2} \frac{d}{dl} (p + \rho gh) \end{cases}$$

③ Q_v 应用: 哈根-泊肃叶公式:

(水平) $Q_v = \frac{\pi \Delta p d^4}{128\mu l} \Rightarrow$ 测定流体粘度的管流法.

$$\Delta p = \frac{128 \mu Q v l}{\pi d^4} : \text{单位体积流体压降}$$

$$h_f = \frac{\Delta p}{\rho g} \Rightarrow \bar{v} = \frac{Qv}{\pi r^2} = \frac{4Qv}{\pi d^2}$$

$$h_f = \frac{32 \mu l \bar{v}}{\rho g d^2} : \text{单位重量流体沿程损失的能量}$$

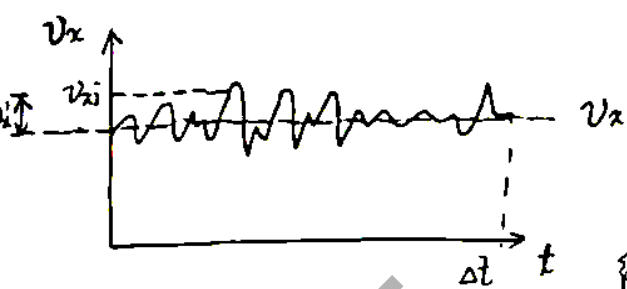
$$\text{圆管雷诺数 } Re = \frac{\rho \bar{v} d}{\mu}$$

$$h_f = \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

达西公式: 层流沿程损失: λ : 沿程阻力系数 (阻力损失)

五. 圆管流体湍流流动:

1. 脉动及时均速度:



$$\text{轴向} \begin{cases} \text{时均速度 } v_x = \frac{\int_0^{\Delta t} v_{xi} dt}{\Delta t} \\ \text{脉动速度 } v_x' = v_{xi} - v_x \end{cases}$$

某点瞬时轴向速度

$$\text{径向} \begin{cases} v_y = 0; v_y' \neq 0 \\ v_z = 0; v_z' \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{压强: } p_i = p + p'$$

2. 湍流中切向应力 (附加切应力—雷诺应力)

切应力起因: 层流: 内摩擦切应力; 湍流: 内摩擦 + 动量交换 (脉动切应力)

各流层的流体质点 互相交换动量时引起雷诺应力

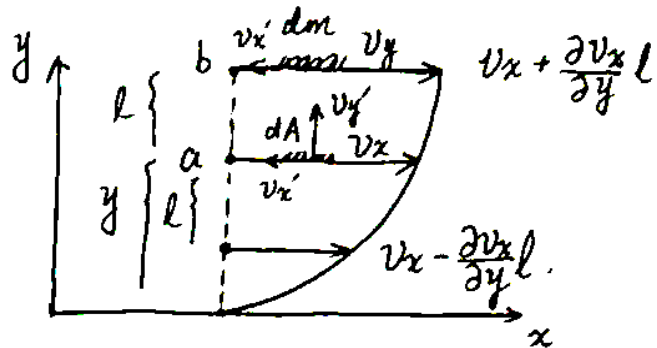
$$\Rightarrow \text{湍流: } \tau = \tau_0 + \tau_t = (\mu + \mu_t) \frac{dv_x}{dy}$$

$$\tau_v = \mu \frac{dv_x}{dy};$$

$$\tau_t = -\rho \overline{v_x' v_y'};$$

$\tau_t > 0$, 是由于 a、b 层相互脉动引起的切应力。

$$\Rightarrow \tau = \mu \frac{dv_x}{dy} - \rho \overline{v_x' v_y'}$$



$\Rightarrow$ dt 时间经 dA 面积由 a 层脉动至 b 层:

$$\text{流体质量 } dm = \rho \cdot dA \cdot v_y' dt$$

$\Rightarrow$ 在 x 方向脉动导致的动量变化:

$$dP = \rho dA v_y' dt \cdot v_x'$$

该动量变化由 b 层流体对微元的切向力导致。

则 dm 对 b 层流体切向力:

$$dF' = -\frac{dP}{dt} = -\rho dA v_x' v_y'$$

$$\Rightarrow \tau_t' = \frac{dF'}{dA} = -\rho v_x' v_y'$$

$$\Rightarrow \text{时均值 } \tau_t = -\rho \overline{v_x' v_y'}$$

a、b 两层流体
间脉动切应力

3. 普朗特混合长理论: (气体分子运动——湍流脉动) (P105 面)

$$\tau_t = \rho l^2 \left| \frac{dv_x}{dy} \right| \cdot \frac{dv_x}{dy}$$

$$\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{dv_x}{dy} \right|: \text{湍流黏性系数.}$$

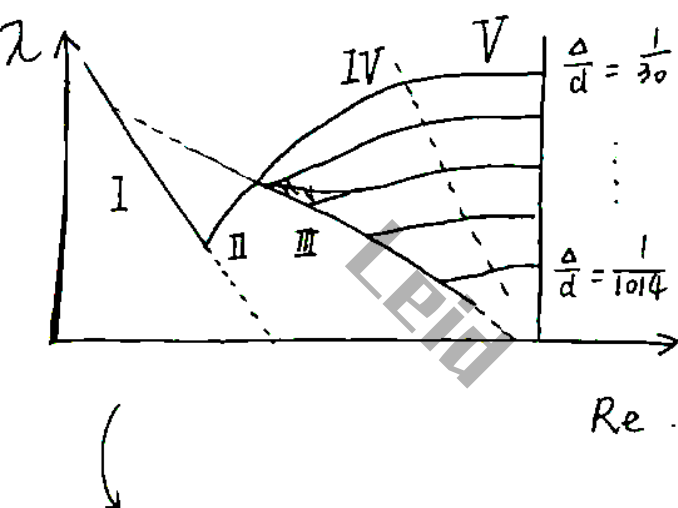
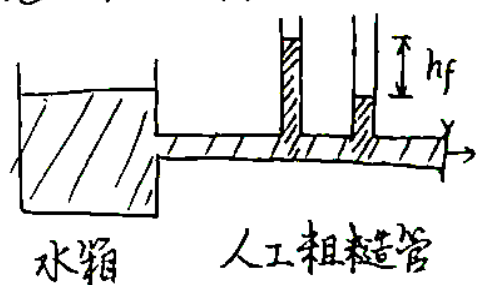
六、沿程损失的实验研究

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \left[\frac{v^2}{2g} \right] \rightarrow \frac{\frac{1}{2} \rho v^2}{\rho g} : \text{单位重量的动能}$$

⇒ 确定 h_f 即确定 λ .

层流: $\lambda = \frac{64}{Re}$
 湍流: 实验法

1. 尼古拉兹实验: (人工粗糙管道) P_{110} 面.



I: (层流区), λ 与 $\frac{d}{\Delta}$ 无关, $\lambda = \frac{64}{Re}$;

II: (过渡区), 不稳定

III: (湍流光滑管区), λ 与 Re 有关, 与 $\frac{d}{\Delta}$ 无关,
 $\frac{d}{\Delta}$ 的大小影响不同管道离开 III 区的位置点.

IV: (湍流粗糙管过渡区), λ 受 Re 、 $\frac{d}{\Delta}$ 影响几乎相等

V: (湍流粗糙管平方阻力区), λ 与 Re 无关, 与 $\frac{d}{\Delta}$ 有关
 h_f 与 v^2 成正比

λ 在不同 $\frac{d}{\Delta}$ 条件下随 Re 的变化情况:

I: $Re < 2320$ $\lambda = \frac{64}{Re}$

II: $2320 < Re < 4000$

III: $4 \times 10^3 < Re < 26.98 \left(\frac{d}{\Delta} \right)^{\frac{8}{7}}$
 $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg (Re \sqrt{\lambda}) - 0.8$

IV: $26.98 \left(\frac{d}{\Delta} \right)^{\frac{8}{7}} < Re < 2308 \left(\frac{d}{\Delta} \right)^{0.85}$
 $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.42 \lg [Re \frac{d}{\Delta}]$

V: $Re > 2308 \left(\frac{d}{\Delta} \right)^{0.85}$
 $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \left(\frac{d}{2\Delta} \right) + 1.74$

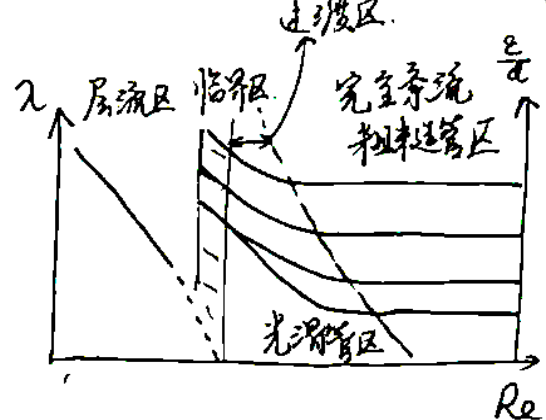
$\lambda = \frac{0.3164}{Re^{0.25}}$

$\lambda = 0.0032 + 0.221 Re^{-0.237}$

2. 莫迪图 (新工业管道) P112面.

- I: 层流区
- II: 临界区
- III: 光滑管区
- IV: 过渡区
- V: 完全湍流粗糙管区

⇒ 与尼古拉兹的5区域对应.



⇒ 湍流 λ 的计算式: $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.74 - 2 \lg \left(\frac{2\Delta}{d} + \frac{18.7}{Re\sqrt{\lambda}} \right)$

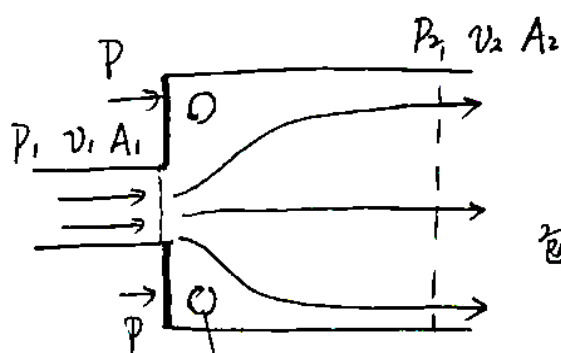
$\left\{ \begin{array}{l} \text{低 } Re \text{ 时: } \lg \left(\frac{2\Delta}{d} + \frac{18.7}{Re\sqrt{\lambda}} \right) \approx \lg \left(\frac{18.7}{Re\sqrt{\lambda}} \right): \text{光滑区公式} \\ \text{高 } Re \text{ 时: } \lg \left(\frac{2\Delta}{d} + \frac{18.7}{Re\sqrt{\lambda}} \right) \approx \lg \left(\frac{2\Delta}{d} \right): \text{粗糙区公式} \end{array} \right.$

七. 局部损失:

- 沿程的能量损失 (沿长度方向)
- 局部的能量损失 (局部管道流线变化急剧)

$$h_f = \zeta \frac{v^2}{2g} \quad (\zeta \text{ 一般需通过实验测定})$$

1. 管道截面突然扩大:



流体因为惯性
形成漩涡. (有热耗散)

连续方程: $v_1 A_1 = v_2 A_2$

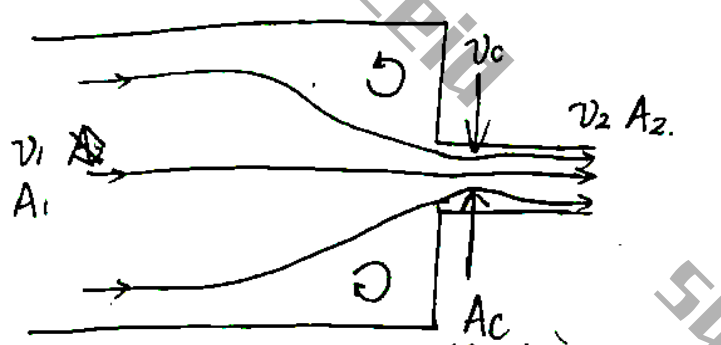
动量方程: $P_1 A_1 - P_2 A_2 - P(A_2 - A_1) = \rho Q v (v_2 - v_1)$
(实验上有 $P = P_1$)

能量方程: $\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_f$
($\alpha = 1$)

包达定理:
$$h_f = \frac{1}{2g} (v_1 - v_2)^2 = \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 = \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2$$

局部损失系数: $\zeta_1 = \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2$; $\zeta_2 = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2$

2. 管道截面突然缩小: (包达定理失效)



仿照截面突扩的情况:

$$h_j = \zeta \frac{v_2^2}{2g} = \underbrace{\zeta_c \frac{v_c^2}{2g}}_{A \text{ 突缩时额外 } \Delta E} + \underbrace{\frac{(v_c^2 - v_2^2)^2}{2g}}_{\text{符合突扩包达定理}}$$

会引入额外的损失能量 ΔE 。
缩颈最小截面积 (由于流体惯性, 进入小截面后继续收缩)。

$$C_c = \frac{A_c}{A_2} \text{ (流束收缩系数)}$$

$$A_c v_c = A_2 v_2$$

$$\zeta = \frac{\zeta_c}{C_c^2} + \left(\frac{1}{C_c} - 1\right)^2$$

实验中可测得 ζ 和 C_c , 可求 ζ_c

管道进口 $\zeta_i = 0.5$

3. 弯管:

- 流动损失来源:
- ① 切向应力产生
 - ② 旋涡产生
 - ③ 二次流形成双螺旋流动

第九节: 各变管道水力计算: P120 (编程大作业)

1. 简单管道 ($\frac{E}{d}$ 或 d 都一样):

连续方程: $Q_m = \rho v A$ & $Q_v = v A$

沿程损失: $h_w = h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$

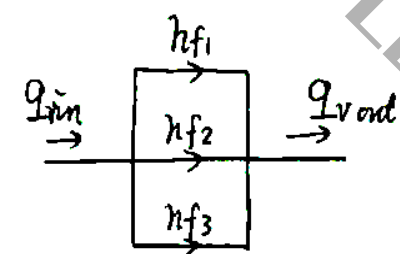
能量方程: $\frac{P_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_w$

2. 串联管道: ($\frac{E}{d}$ 或 d 有差异)

$$h_f = \sum_i h_{fi}$$

伯努利方程

3. 并联管道: (类比电路)

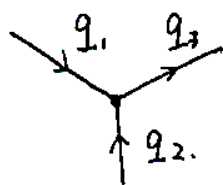


① $h_f = h_{f1} = h_{f2} = h_{f3} = \dots = h_{fi}$

(并联管中, 流体会根据流动阻力强弱来选择路径, 最终效果表现为各管支路 h_{fi} 相等)

② $q_{in} = \sum_i q_{vi} = q_{out}$ (类比电流 I)

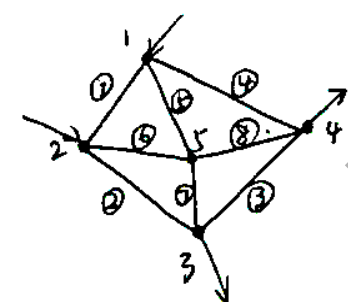
4. 分支管道:



$q_{in} = q_{out}$

可预先假设 q_{vi} 方向, 流入为负, 流出为正, 代数和 $\sum_i q_{vi} = 0$.

5. 管网:



n 个结点: n 个质量方程 $\left(\sum_i q_{vi} = 0 \right)$ $\left\{ \begin{array}{l} q_{vin} \text{ 为负} \\ q_{vout} \text{ 为正} \end{array} \right.$

(任选一结点 (如管道))

m 个支路 (有 n 个压力): m 个动量方程.

$\Rightarrow$ 解得: $\begin{cases} m \text{ 个 } q_v \text{ (各支路流量)} \\ n \text{ 个 } p \text{ (各结点压力)} \end{cases}$

$\Rightarrow$ 注意: $\sum h_f = \oint h_f = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} h_f \text{ (顺时针)} < 0 \\ h_f \text{ (逆时针)} > 0 \end{array} \right.$

(任选一环路求和 (并联管道))

第十节: 常用装置: P127面: 水击现象 P141面

记录流器、虹吸管、P141 水击现象, 了解即可.

第八章 理想流体的有旋/无旋运动:

一、微分形式连续方程:

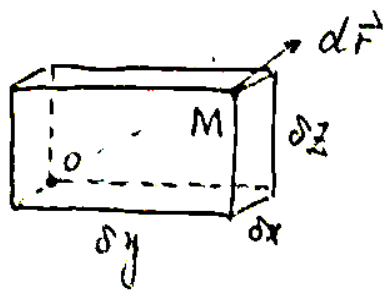
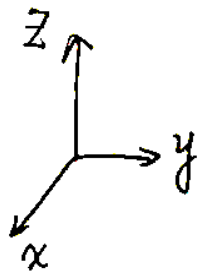
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow$$

不可压缩流体 ($\rho = c$):

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{v} = 0}$$

定常流动: ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

二、流体微团运动分解:



O: $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

$\Rightarrow M:$

$$\begin{cases} v_{Mx} = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x + (\dot{\gamma}_z \delta y + \dot{\gamma}_y \delta z) + (\omega_y \delta z - \omega_z \delta y) \\ v_{My} = v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta y + (\dot{\gamma}_x \delta z + \dot{\gamma}_z \delta x) + (\omega_z \delta x - \omega_x \delta z) \\ v_{Mz} = v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} \delta z + (\dot{\gamma}_y \delta x + \dot{\gamma}_x \delta y) + (\omega_x \delta y - \omega_y \delta x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right); \quad \dot{\gamma}_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right); \quad \dot{\gamma}_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right); \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right); \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \end{cases}$$

$\Leftarrow \vec{\omega} = \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{v})$

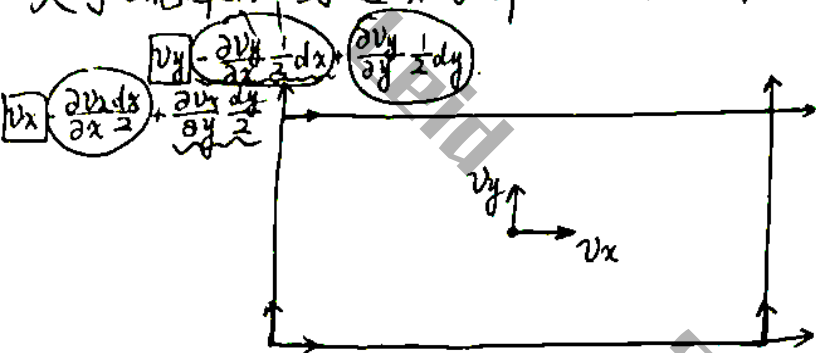
$\rightarrow$ 表明流体有旋运动时, 流体质点围绕轴旋转效应.

$\vec{\gamma}$ 表明流体角变形运动

$\frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial y}, \frac{\partial v_z}{\partial z}$ 表明三个方向上线变形运动

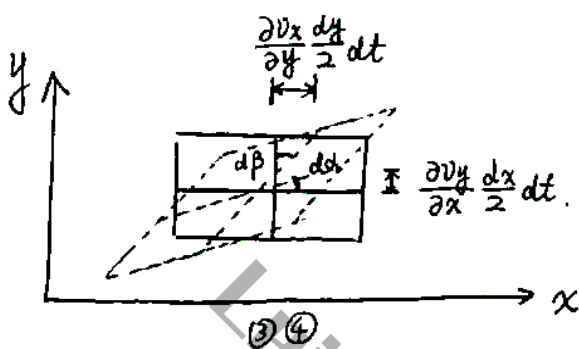
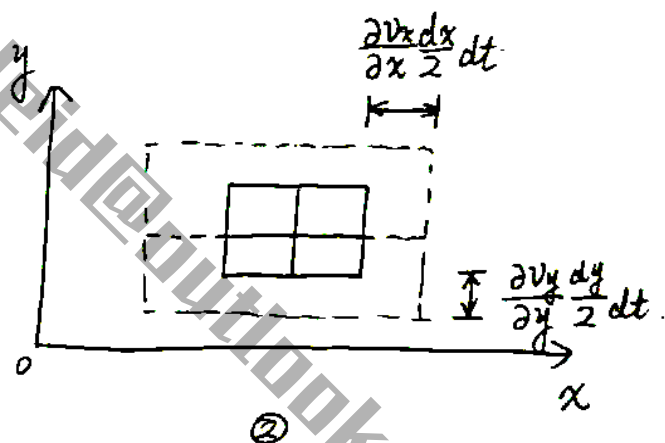
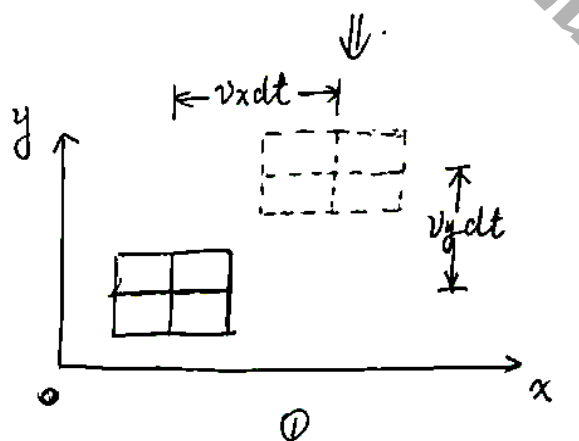
v_x, v_y, v_z 表明平移运动

关于流体微团运动分解的一种分析思路:



① 平移运动: v_x, v_y .

② 线变形速度: $\frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{2} dt = \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{2} dt$
 $\frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{dy}{2} dt = \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{dy}{2} dt$



$$\begin{cases} d\alpha = \tan^{-1}(d\alpha) = \frac{\frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{dx}{2} dt}{\frac{1}{2} dx} = \frac{\partial v_y}{\partial x} dt \quad (\text{逆时针}) \\ d\beta = \tan^{-1}(d\beta) = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{2} dt}{\frac{1}{2} dy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} dt \quad (\text{顺时针}) \end{cases}$$

③ 角变形速度: $\begin{cases} \dot{\gamma}_z = \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha + d\beta}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \dot{\gamma}_x = \dots \\ \dot{\gamma}_y = \dots \end{cases}$

④ 旋转运动: $\begin{cases} \omega_z = \frac{(d\alpha - d\beta)}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \omega_x = \dots \\ \omega_y = \dots \end{cases}$

角变形表现了角向的总体变形情况, 用 $d\alpha + d\beta$ 来描述;
 旋转运动需要逆时针角向为正, 顺时针为负, 因此用 $d\alpha - d\beta$ 来描述.

三 理想流体运动微分方程:

牛顿第二定律:
(欧拉方程)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{当地加速度}} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}}_{\text{迁移加速度}} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

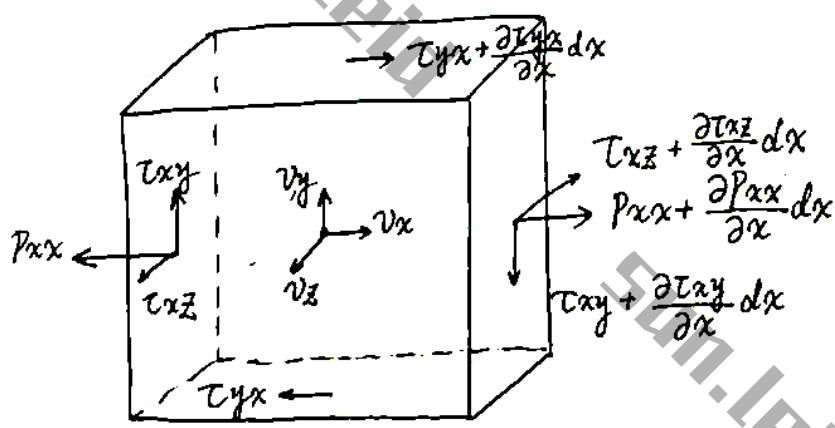
求解的是 $\vec{v}, p, \rho$ (一般 ρ 需要查工质物性得出, 有时与温度有关, 则还需求 $T(x, y, z, t)$)

⇒ 定解条件:

- 初始条件: $t=0, \vec{v}, p, \rho$ 的分布已知.
- 边界条件:
 - 固体壁面: $v_n = v_{bn}$ (固体面法向速度)
 - 流体分界面: $v_{1n} = v_{2n}; T_1 = T_2$ (连续变化)
 - 出口进口处: 特定情况下设定

第九章 黏性流体绕流运动:

1. Navier-Stokes Equation:



根据 x 方向应力状态:

正应力 + 切应力合力: $\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz$

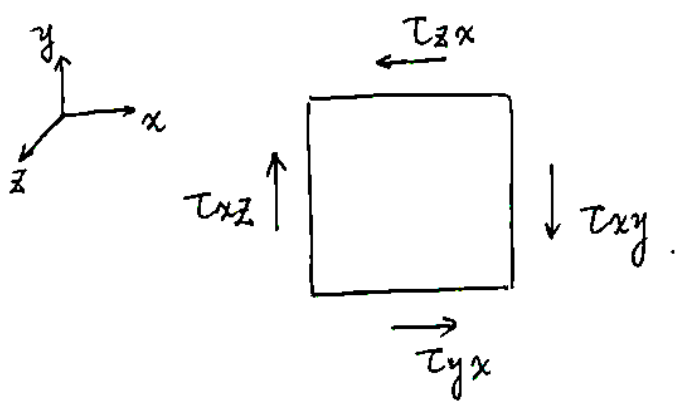
↓ 代入牛顿第二定律 (运动方程):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) v_x = f_x - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

处理应力: 补充关于应力与 $\vec{v}$ 的本构关系

(类似材料力学的胡克定律, 这里使用的运动分解定律)



切应力平衡状态: $\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{zx} = \tau_{xz}; \tau_{yz} = \tau_{zy}$

· 引入广义牛顿内摩擦定律: (切应力本构关系)

平板: $\tau = \mu \left(\frac{dv_x}{dy} \right) \rightarrow$ 微团角变形速度 $(\dot{\gamma}) : \frac{d\varphi}{dt}$



$\Rightarrow$ 三维微团绕 Z 轴的角变形: $\dot{\gamma}_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$

(Helmholtz 运动分解得到)

$\Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \cdot 2\dot{\gamma}_z = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$

(τ_{xy}, τ_{yx} 产生的也是关于 Z 轴角变形的变形效应)

· 运动黏性流体中, 微团由于线应变引发附加正应力 $\Rightarrow$ 正应力与压力不等.

$\Rightarrow p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}$

(类比切向应力, 使用应变率 + 牛顿内摩擦构造正应力关系)

写出 p_{yy}, p_{zz} 和 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

$\rightarrow$ 推论: 压强 $p = -\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})$ 对不可压缩流体成立

$\Rightarrow$ 将应力本构方程代入运动方程: (且 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) v_x = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 v_x$$

$\rightarrow$ 三维全方向: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} \rightarrow$ 不可压缩黏性流体 N-S 方程.