作者: Airocéan[1]

准中性：小尺度：电磁性；大尺度：中性。界限就是 Debye 半径

集体性：主要由长程的电磁力所导致的磁流体力学的描述（**碰撞主导**）：

空间：运动的特征长度（如**离子**回旋半径）远大于带电粒子的（碰撞）平均自由程；

时间：运动的特征时间（如**离子**回旋周期）远大于带电粒子的平均碰撞时间；

等体温度 T 只在热力学平衡时有意义，此时服从麦克斯韦分布：

$$f(v)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

粒子平均动能：

$$\langle E\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\frac{1}{2}mv^2\mathrm{d}v=\frac{3}{2}kT=\frac{3}{2}mv_{\rm th}^2$$

粒子热速度为：$v_{\rm th}=\sqrt{kT/m}$ 这里可以认为粒子在任意一个方向上的热速度导致的动能，三个相加就成了粒子的平衡动能

同种粒子之间达到平衡远比异种之间达到平衡快得多，因此在整体还没有达到平衡的情况下用各自的温度来表征

由于磁场的存在，$T_\perp$ 和 $T_\parallel$ 不相等

粒子平均间距：$d^3n=1\Rightarrow d=n^{-1/3}$

经典条件：$\lambda\sim h/\sqrt{mkT}\ll d\Rightarrow n^{1/3}T^{-1/2}\ll 1$ 德布罗意波长远小于平均间距 d

稀薄条件（可以当理想气体处理）：$\bar{E}_{\rm p}\ll E_{\rm k}\Rightarrow n\lambda_{\rm L}^3\ll 1$ 这个时候等体压强可以写成 $p=p_{\rm e}+p_{\rm i}=n_{\rm e}kT_{\rm e}+n_{\rm i}kT_{\rm i}$

Debye 半径（Poisson, Boltzmann）：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)=\frac{\varphi}{\lambda_{\rm D}^2}$$

$$\lambda_{\rm D}=\left(\frac{n_{\rm e0}e^2}{\varepsilon_0 kT_e}+\frac{Z_{\rm i}^2e^2n_{\rm i0}}{\varepsilon_0 kT_{\rm i}}\right)^{-1/2}$$

代入可得

$$\varphi(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\exp\left(-\frac{r}{\lambda_{\rm D}}\right)$$

电子振荡：电荷过剩 + 惯性（离子质量太大，在电子的运动时间尺度内静止）

$$m_{\rm e}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-eE=-\frac{n_{\rm e}e^2}{\varepsilon_0}x$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_{\rm pe}^2x=0$$

$$\omega_{\rm pe}=\left(\frac{n_{\rm e}e^2}{\varepsilon_0 m_{\rm e}}\right)^{1/2}$$

$$\omega_{\rm pi}=\left(\frac{n_{\rm i}Z_{\rm i}^2{\rm e}^2}{\varepsilon_0 m_{\rm i}}\right)^{1/2}$$

$$\omega_{\rm p}=\left(\omega_{\rm pe}^2+\omega_{\rm pi}^2\right)^{1/2}\approx\omega_{\rm pe},\quad \lambda_{\rm D}=\frac{v_{\rm th}}{\omega_{\rm pe}}$$

即回旋半径和周期是等体运动的特征量，而 Debye 半径和电子振荡是准中性和集体性的特征量。等体某处发生扰动（电荷聚集），要多少时间做出反应，消除偏离的电中性，定义电子以平均特征速度走过 Debye 长度的时间为响应时间：$t_{\rm D}=\lambda_{\rm D}/v_{\rm th}=1/\omega_{\rm pe}$. 即认为**等体中电中性被破坏，$\omega_{\rm pe}^{-1}$ 的时间内可以消除。**

等体条件：$L\gg\lambda_{\rm D}$, $N_{\rm D}=n\lambda_{\rm D}^3\gg 1$, $\tau\gg t_{\rm D}$. Larmor 回旋；

$$\vec{\omega}_{\rm c}=\frac{q\vec{B}}{m},\quad r_{\rm c}=\frac{mv_\perp}{qB}$$

回旋中心漂移近似指把局域磁场看成常数，忽略回旋中心本身的漂移，回旋半径远小于非均匀性特征长度（标长）认为是求解平均的慢运动

电漂移，与 q 无关：

$$\vec{v}_{\rm E}=\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2v_x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega_{\rm c}^2v_x,\frac{\mathrm{d}^2v_y}{\mathrm{d}t^2}=-\omega_{\rm c}^2\left(v_y+\frac{E_x}{B}\right)$$

$$v_x=v_\perp\cos\omega_{\rm c}t,v_y=-v_\perp\sin\omega_{\rm c}t-\frac{E_x}{B}$$

梯度漂移：弱非均匀性（转圈得快，移动得慢）（空间不均匀性的特征长度远大于快运动的特征波长，时间相同）（一个回旋周期内回旋中性的漂移距离远小于回旋半径）：$v_{\nabla B}/v_\perp\sim r_{\rm c}\nabla B/B\sim r_{\rm c}/L\ll 1$, $v_{\rm D}/\omega_{\rm c}\ll r_{\rm c}$,

$$v_{\nabla B}=\frac{1}{2}v_\perp r_{\rm c}\frac{\vec{B}\times\nabla B}{B^2}$$

其中

$$\langle v_{\rm c}\rangle=\frac{\int_T\vec{v}_{\rm c}\mathrm{d}t}{T}$$

$$|q<\vec{v}_{\rm c}\times(\vec{r}_{\rm c}\cdot\nabla)B_0>|=-\mu\nabla B$$

以及磁矩

$$\mu=\frac{mv_\perp^2}{2B}$$

曲率漂移：

$$v_{R_{\rm c}}=\frac{\vec{F}_{\rm cf}\times\vec{B}}{qB^2}=\frac{mv_\parallel^2}{qB^2}\frac{\vec{R}_{\rm c}\times\vec{B}}{R_{\rm c}^2}$$

$$v_{R_{\rm c}}+v_{\nabla B}=\frac{m}{q}\frac{\vec{R}_{\rm c}\times\vec{B}}{R_{\rm c}^2B^2}\left(v_\parallel^2+\frac{1}{2}v_\perp^2\right)$$

极化漂移 $\vec{E}=\vec{E}_0\exp({\rm i}\omega t)$：

$$v_{\rm D}=\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}+\frac{1}{\omega_{\rm c}B}\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t}$$

缓慢运动不变量：磁矩 $\mu=m_\perp^2/2B$、纵向不变量 $J=\int_b^a v_\parallel\mathrm{d}s$、磁通不变量 Φ

MHD 频繁碰撞，缓慢变化，即等体的特征长度和特征时间（在这个长度和时间内等体参数会发生显著变化）远大于等体粒子的平均自由程和平均碰撞时间，此时等体可以看成局部热平衡，可以类似流体那样定义速度、压强、温度、密度。其中的电磁作用会产生附加的机械力，改变流体运动，也改变原有磁场。

流体元：与流体比很小，与分子的平均自由程比大很多（宏观无限小，微观无限大）

连续性方程：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_r\rho\mathrm{d}\tau&=-\int_\Sigma\rho\vec{u}\cdot\mathrm{d}\sigma\\&=-\int_\tau\nabla\cdot(\rho\vec{u})\mathrm{d}\tau\\\frac{\partial\rho}{\partial t}&+\nabla\cdot(\rho\vec{u})=0\\\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}&+\rho\nabla\cdot\vec{u}=0\end{aligned}$$

定常流：$\partial\rho/\partial t=0$，不可压 $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t=0$.

运动方程：

$$\begin{aligned}\int_\tau\rho\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\tau&=\int_\tau\rho\vec{g}\mathrm{d}\tau+\int_\Sigma\overset{\rightrightarrows}{P}\cdot\ \mathrm{d}\vec{\sigma}\\&=\int_\tau\rho\vec{g}\ \mathrm{d}\tau+\int_\tau\nabla\cdot\overset{\rightrightarrows}{P}\mathrm{d}\tau\\\rho\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}&=\nabla\cdot\overset{\rightrightarrows}{P}+\rho\vec{g}\\&=\text{表面力}+\text{体积力}\end{aligned}$$

能量方程：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\tau\rho\left(\varepsilon+\frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau\\&=\int_\tau\rho\vec{g}\cdot\vec{u}\ \mathrm{d}\tau+\int_\Sigma\overset{\rightrightarrows}{P}\cdot\vec{u}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}-\int_\Sigma\vec{q}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}\\&\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varepsilon+\frac{\vec{u}^2}{2}\right)\\&=\nabla\cdot(\overset{\rightrightarrows}{P}\cdot\vec{u})+\rho\vec{g}\cdot\vec{u}-\nabla\cdot\vec{q}\\&\quad\text{内}+\text{动}=\text{体}+\text{表}-\text{热流}\end{aligned}$$

Maxwell 方程组：

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{J}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho_q}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

欧姆定律 $\vec{J}=\sigma\vec{E}$

洛仑磁力 $\vec{f}=\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}$

K’ 系：

$$\vec{J}'=\sigma\vec{E}'$$

$$\vec{E}'=\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}$$

$$\vec{J}'=\rho\vec{v}'=\rho(\vec{v}-\vec{u})=\vec{J}-\rho\vec{u}$$

[1]airocean@mail.ustc.edu.cn, a@airocean.cn, airocean@foxmail.com, http://airocean.cn

最终得

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) + \rho\vec{u}$$
$$\text{电流} = \text{传导} + \text{感应} + \text{运流}$$

当场频率 ω 的波长 $\lambda \sim c/\omega$ 远大于等体运动的特征长度 L，即 $c/\omega \gg L$. 再如场变化的特征时间远大于粒子碰撞事件 $\sigma/\varepsilon_0\omega \gg 1$, 等体是良导体（碰撞频繁导电率高的结论可以先记住，这个表述或许有待商榷），一般可以满足，称**准静态**，$\rho\vec{u}$ 和 $\rho\vec{E}$ 可以忽略。（这里猜测能够忽略运流电流的一大原因就是整个流体微元能够保持电中性，这样就需要上文所述波长大于流体运动的特征长度的假设来保证这一点）**（特征长度、特征时间里的 ''特征'' 是指在这个特征之内，认为该物理量没有变化，在这个特征之外物理量可以出现变化，也可以说是线性思想的一种体现）**

完整和封闭的磁流体力学方程组：

$$\text{连续性} \quad \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{u}(\vec{r},t)) = 0$$
$$\text{运动} \quad \rho(\vec{r},t)\frac{\mathrm{d}\vec{u}(\vec{r},t)}{\mathrm{d}t} = -\nabla P + \vec{J}\times\vec{B}$$
$$\text{能量守恒（状态）} \quad P\rho^{-\gamma} = \text{Const}$$
$$\text{Ampère} \quad \vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B}$$
$$\text{Faraday} \quad \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\nabla\times\vec{E}$$
$$\text{Ohm} \quad \vec{E} = -\vec{u}\times\vec{B}$$
$$\text{Gauss} \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

双流体模型适合电子流体和离子流体之间远未达到热力学平衡状态的等体。不同组分分别独立运动，组分之间的碰撞导致了他们之间的相互作用，也导致了电阻，算一种体积力。其微观理论是在各组分里分别达到热平衡的时间都远小于两个组分之间的热交换特征时间。电中性条件：$n_\mathrm{i} = n_\mathrm{e} = n$

$$nm_\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\mathrm{i}}{\mathrm{d}t} + \nabla p_\mathrm{i} = en(\vec{E} + \vec{u}_\mathrm{i}\times\vec{B}) + \vec{M}_\mathrm{ie}$$
$$nm_\mathrm{e}\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t} + \nabla p_\mathrm{e} = -en(\vec{E} + \vec{u}_\mathrm{e}\times\vec{B}) + \vec{M}_\mathrm{ei}$$
$$\vec{M}_\mathrm{ei} = -\vec{M}_\mathrm{ie} = \nu_\mathrm{ei}n\frac{m_\mathrm{e}m_\mathrm{i}}{m_\mathrm{i}+m_\mathrm{e}}(\vec{u}_\mathrm{i} - \vec{u}_\mathrm{e})$$

略去电子惯性项，且 $p = p_\mathrm{e} + p_\mathrm{i}$，$\vec{J} = en(\vec{u}_\mathrm{i} - \vec{u}_\mathrm{e})$, 有

$$nm_\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} + \nabla p = \vec{J}\times\vec{B}$$
$$\vec{u}_\mathrm{i}\times\vec{B} = \vec{u}_\mathrm{e}\times\vec{B} + \frac{1}{en}\vec{J}\times\vec{B}$$
$$\nabla p_\mathrm{e} = -en(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}) + \vec{J}\times B + \frac{en}{\sigma}\vec{J}$$

磁压力和磁张力：沿着磁场方向往外拉，垂直磁场方向往里压，Lorentz 力

$$\begin{aligned}\vec{f} = \vec{J}\times\vec{B} &= \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B} \\ &= -\frac{1}{2\mu_0}\nabla B^2 + \frac{1}{\mu_0}(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B} \\ &= \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2}B^2\overset{\rightrightarrows}{I}) \\ &= \nabla\cdot\overset{\rightrightarrows}{T}\end{aligned}$$

可以分别得到磁张力和磁压力，其中磁压力各向同性，磁张力沿着磁场方向，此时的磁张力就类似于绳子的张力，可以在这个基础上形成波动，也是后面波动的来源：

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_\tau \vec{f}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \oint_\Sigma \frac{B^2}{\mu_0}\cos\theta\;\vec{b}\,\mathrm{d}\sigma + \oint_\Sigma \frac{B^2}{2\mu_0}\left(-\vec{e}_\mathrm{n}\right)\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

磁感应方程，描述了磁场与导电流体相互作用时，磁场随时间变化规律。该方程与流体中的涡旋部分比较像。磁场变化 = 磁对流项 + 磁扩散项，其中磁粘滞系数（扩散系数）$\eta_\mathrm{m} = 1/\mu_0\sigma$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \nabla\times(\vec{u}\times\vec{B}) + \eta_\mathrm{m}\nabla^2\vec{B}$$

通常定义雷诺数 $Rm = UL/\eta_\mathrm{m}$.

磁扩散：当 $Rm \ll 1$，导电流体不流动，$\partial\vec{B}/\partial t = \eta_\mathrm{m}\nabla^2\vec{B}$，即扩散方程，电阻导致感应电流衰减，磁场从大的区域到小的区域扩散（类似碰撞导致粒子扩散）。流体的电导率越大，磁场扩散越慢。

磁冻结：当 $Rm \gg 1$，导体电导率 $\sigma \to \infty$，即 $\partial\vec{B}/\partial t = \nabla\times(\vec{u}\times\vec{B})$, 磁场的变化如同磁感线黏附于流体元上，磁感线被冻结在导电流体中。（其实磁冻结有点类似的曲率漂移的状态，当然只是类似，肯定还是不一样的，原因在于 MHD 的假设）

抗磁漂移（布了作业，与 ∇p 有关）：

$$nm\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\right] = qn(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}) - \nabla p$$

其中 $\partial\vec{u}/\partial t$ 和 $(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$ 忽略。

$$\begin{aligned}0 =& qn\left[\vec{E}\times\vec{B} + \left(\vec{u}_\perp\times\vec{B}\right)\times\vec{B}\right] \\ &- \nabla p\times\vec{B} \\ =& qn\left[\vec{E}\times\vec{B} + \vec{B}\left(\vec{u}_\perp\cdot\vec{B}\right) - \vec{u}_\perp B^2\right] \\ &- \nabla p\times\vec{B} \\ \vec{u}_\perp =& \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2} - \frac{\nabla p\times\vec{B}}{qnB^2} = \vec{u}_\mathrm{E} + \vec{u}_\mathrm{D}\end{aligned}$$

等离体子近似 $n_\mathrm{e} = n_\mathrm{i}$，$\nabla\cdot\vec{E} \neq 0$

传播和信息相关联。传播有信息（状态）在时空上的坐标变化，这个表述可以指导波动（主要）和振荡的思想。想要判断是否是信息的传递可以尝试主动改变系统内一状态，看系统其它部分是否会一并响应。

热运动以热流速度流入等体附近电子，携带出振荡区域的信息，成为**波**，在运动方程中加上 ∇p_e 容易处理这样的效应。

电子等体波（Langmuir 波）色散关系：

$$\omega^2 = \omega_\mathrm{pe}^2 + k^2v_\mathrm{th}^2$$

也有离子等体波，低频静电波中，波长 λ 与 λ_D 比较，波长大于 Debye 长度 $\lambda/\lambda_\mathrm{D} \gg 1$ 是离子声波，相反是离子等体波（离子 Langmuir 波）

中性气体声波，忽略粘滞力，NS 方程：

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right] = -\nabla p = -\frac{\gamma p}{\rho}\nabla\rho$$

且连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0$$

作线性化可得：

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma T}{M}\right)^{1/2} \equiv c_\mathrm{s}$$

无碰撞，中性声波不会发生，但离子由于电场力依然可以传递振荡，声波可以通过电场的媒介发生。**离子声波**，离子质量大，所以是低频振荡，用等体近似，假定 $n_\mathrm{e} = n_\mathrm{i} = n$，且不用 Poisson 方程，离子流体方程：

$$\begin{aligned}m_\mathrm{i}n_\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{i}}{\mathrm{d}t} &= en_\mathrm{i}\vec{E} - \nabla p \\ &= -en_\mathrm{i}\nabla\phi - \gamma_\mathrm{i}T_\mathrm{i}\nabla n_\mathrm{i}\end{aligned}$$

电子力平衡要求有：

$$\begin{aligned}n_\mathrm{e} = n &= n_0\exp\left(\frac{e\phi_1}{T_\mathrm{e}}\right) \\ &= n_0\left(1 + \frac{e\phi_1}{T_e} + \cdots\right)\end{aligned}$$

电子密度扰动：

$$n_1 = n_0\frac{e\phi_1}{T_\mathrm{e}}$$

此时已经假定了 $\vec{E}_0 = 0$ 则 $\phi_0 = 0$，再加上离子连续性方程 $\mathrm{i}\omega n_1 = n_0\mathrm{i}kv_{\mathrm{i}1}$ 最后得到色散关系

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{\gamma_\mathrm{e}T_\mathrm{e} + \gamma_\mathrm{i}T_\mathrm{i}}{m_\mathrm{i}}\right)^{1/2} \equiv v_\mathrm{s}$$

第一项源于电场泄露，第二项源于离子热运动，由于离子本身惯性，运动超过平衡位置，形成波。为什么可以假定 $n_\mathrm{i} = n_\mathrm{e}$（对 $\vec{E}$ 的影响）。电子等体波和离子声一个是电子的运动方程一个是离子的运动方程（电场力和热压），短波长有 $k^2\lambda_\mathrm{D}^2 \gg 1$，根据各波表达式，电子等体波本质恒 ω，在大 k 时变成恒 v 的，离子声本质上恒 v，在大 k 时变成恒 v 的，离子声本质上恒 ω。以上的话都可以看 F. F. Chen P63.

以上都是没有 $\vec{B}_0$ 的波

平行、**垂直**表示 $\vec{k}, \vec{B}_0$ 的方向关系，**横向**、**纵向**表示 $\vec{k}$ 和 $\vec{E}_1$ 的方向关系

$$\nabla\times\vec{E}_1=-\frac{\partial\vec{B}_1}{\partial t}\to\vec{k}\times\vec{E}_1=\omega\vec{B}_1$$

可以看出，纵向，$\vec{k}\times\vec{E}_1=0$，静电，反之电磁。质量守恒定义：

$$\frac{\partial n_1}{\partial t}+\nabla\cdot(n\vec{v}_1)=0$$

运动方程定义：

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t}=-e\vec{E}_1-e\vec{v}_1\times\vec{B}_0$$

且 $\nabla\cdot\vec{E}_1=-en_{\mathrm{e}1}/\varepsilon$. 再选定方向，如 $x\to\vec{k},\vec{E}_1$，$z\to\vec{B}_0$. **静电电子振荡**色散关系：

$$\omega^2=\omega_{\mathrm{p}}^2+\omega_{\mathrm{ce}}^2\equiv\omega_{\mathrm{h}}^2$$

ω_{h} 被称为上杂化频率，**穿过** $\vec{B}$ 的静电电子波有这样的频率

$\vec{k}$**（几乎）垂直于** $\vec{B}_0$ **的静电离子波**，条件：无限等体、定常均匀的 $n_0,\vec{B}_0$, $\vec{v}_0=\vec{E}_0=0$, $T_{\mathrm{i}}=0$, $\vec{k}\times\vec{E}=0\to\vec{E}=-\nabla\phi$, 因为 "几乎" 垂直，离子可以取 $\vec{E}=E_1\hat{x},\nabla=\mathrm{i}k\hat{x}$, 而电子因质量比较小不可取得，同时因为角度电子可以从一波前调到另一波前，实现 Debye 屏蔽，而离子的惯性大不能在一个波周期内运动那么长的距离，所以离子可以有上面的取值电子不行。根据描述，上面的小角度 ξ 正比于 i, e 的平行速度之比 $\xi\simeq(m/M)^{1/2}$，在这个角度之下可以认为 $\vec{k},\vec{B}_0$ 完全垂直。

离子运动方程：

$$m_{\mathrm{i}}\frac{\partial\vec{v}_{\mathrm{i}1}}{\partial t}=-e\nabla\phi_1+e\vec{v}_{\mathrm{i}1}\times\vec{B}_0$$

离子连续性方程：

$$n_{\mathrm{i}1}=n_0\frac{k}{\omega}v_{\mathrm{i}x}$$

由于 ξ, 电子能沿着 $\vec{B}_0$ 运动，则可以使用电子 Boltzmann 关系，线性化为：

$$\frac{n_{\mathrm{e}1}}{n_0}=\frac{e\phi_1}{T_{\mathrm{e}}}$$

且 $n_{\mathrm{i}}=n_{\mathrm{e}}$, $T_{\mathrm{i}}=0$, 则**静电离子回旋波**色散关系：

$$\omega^2=\omega_{\mathrm{ci}}^2+k^2v_{\mathrm{s}}^2$$

（有用 Boltzmann 就需要用到 ϕ）（上面两个，静电电子振荡、静电离子波都是原波加上回旋频率的关系）当不存在 Lorentz 力时，色散关系：$\omega^2=k^2v_{\mathrm{s}}^2$, 变成离子声，可以说 Lorentz 力提供了新的频率

当 ξ 小时，认为精确为 $\pi/2$, 电子不允许沿磁力线流动，不遵守 Boltzmann 关系，最终得到

$$\omega=(\omega_{\mathrm{ci}}\omega_{\mathrm{ce}})^{1/2}\equiv\omega_{\mathrm{l}}$$

被称为**下杂化频率**

由 $\vec{k}\cdot\vec{B}_1=-\mathrm{i}\nabla\cdot\vec{B}_1=0$ 也可以理解电磁波是横波的原因

$\vec{B}_0=0$, $\vec{B}_1\neq0$ **的电磁波**、**横向电磁波**，用到了

$$\nabla\times\vec{E}_1=-\frac{\partial\vec{B}_1}{\partial t}$$
$$c^2\nabla\times\vec{B}_1=\frac{\partial\vec{E}_1}{\partial t}+4\pi\vec{j}_1$$
$$\left(c^2\nabla\times\frac{\partial\vec{B}_1}{\partial t}=\frac{\partial^2\vec{E}_1}{\partial t^2}+4\pi\frac{\partial\vec{j}_1}{\partial t}\right)$$
$$\vec{j}_1=-n_0e\vec{v}_{\mathrm{e}1}$$

其色散关系解得：

$$\omega^2=\omega_{\mathrm{pe}}^2+c^2k^2$$

该表达式与 Langmuir 波的色散关系类似，Langmuir 波有电子热速度的来源，这里**没有直流磁场的等体中传播的电磁波**有电磁波的来源。该色散关系给出**截止**现象，当 $\omega>\omega_{\mathrm{pe}}$，$k$ 为虚数，会指数衰减

垂直于 $\vec{B}_0$ **的电磁波**，分两种情况：**1.** 寻常波 $\vec{E}_1\parallel\vec{B}_0$. **2.** 非寻常波 $\vec{E}_1\perp\vec{B}_0$. 磁化等离子体高频波线性化方程组（不考虑热压）：

$$m_{\mathrm{e}}n_0\frac{\partial\vec{v}_{\mathrm{e}1}}{\partial t}+en_0(\vec{E}_1+\vec{v}_{\mathrm{e}1}\times\vec{B}_0)=0$$
$$\nabla\times\vec{E}_1=-\frac{\partial\vec{B}_1}{\partial t}$$
$$\nabla\times\vec{B}_1=\mu_0\vec{j}_1+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}_1}{\partial t}$$
$$\vec{j}_1=-n_0e\vec{v}_{\mathrm{e}1}$$

寻常波，很明显，由于 $\vec{E}_1\parallel\vec{B}_0$，磁场不影响扰动，色散关系与 $\vec{B}_0=0$ 时一致：

$$\omega^2=\omega_{\mathrm{pe}}^2+c^2k^2$$

非寻常波：电子受到 $\vec{B}_0$ 影响，产生偏振，让 $\vec{k}$ 沿着 $\hat{x}$，有 $\vec{E}_1=E_x\hat{x}+E_y\hat{y}$，则线性化后的电子运动方程：

$$\mathrm{i}m_{\mathrm{e}}\omega\vec{v}_{\mathrm{e}1}=-e(\vec{E}+\vec{v}_{\mathrm{e}1}\times\vec{B}_0)$$

写成分量形式（角标 1, e 已经去掉）

$$v_x=\frac{-\mathrm{i}e}{m_{\mathrm{e}}\omega}(E_x+v_yB_0)$$
$$v_y=\frac{-\mathrm{i}e}{m_{\mathrm{e}}\omega}(E_y-v_xB_0)$$

利用与 $\vec{B}_0=0$ 时相同的波动方程关系：

$$(\omega^2-c^2k^2)\vec{E}_1+c^2kE_x\vec{k}=-4\pi\mathrm{i}\omega\vec{j}_1$$
$$=4\pi\mathrm{i}n_0\omega e\vec{v}_{\mathrm{e}1}$$

最终得到色散关系：

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2}=\frac{c^2}{v_\phi^2}=1-\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\frac{(\omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2)}{(\omega^2-\omega_{\mathrm{h}}^2)}$$

是部分横向部分纵向的，$\vec{k}\perp\vec{B}_0,\vec{E}_1\perp\vec{B}_0$

定义 $n=ck/\omega$ 为折射率，当折射率为 0、波长无穷大时，发生**截止**，折射率无穷大，波长为 0 时，发生**共振**。波是椭圆偏振的，可以用矩阵运算里面 E_x/E_y 得到

共振：k 无穷大，对于任意有限的 ω，$\omega\to\omega_{\mathrm{h}}$，因此共振发生在等体中满足下列条件的点：

$$\omega_{\mathrm{h}}^2=\omega_{\mathrm{pe}}^2+\omega_{\mathrm{ce}}^2=\omega^2$$

即上面的有 $\vec{B}_0$ 的电子静电振荡，其相速度群速度都接近于 0，波的能量被转化为该振荡，非寻常波是部分电磁部分静电的，在共振点，其损失了电磁特性，形成了静电振荡

截止：令非寻常波色散关系的 $k=0$，得到

$$\omega^2\mp\omega\omega_{\mathrm{ce}}-\omega_{\mathrm{pe}}^2=0$$

有两个解，分别对应右旋截止频率和左旋截止频率

$$\omega_{\mathrm{R}}=\frac{1}{2}\left[\omega_{\mathrm{ce}}+\left(\omega_{\mathrm{ce}}^2+4\omega_{\mathrm{pe}}^2\right)^{1/2}\right]$$
$$\omega_{\mathrm{L}}=\frac{1}{2}\left[-\omega_{\mathrm{ce}}+\left(\omega_{\mathrm{ce}}^2+4\omega_{\mathrm{pe}}^2\right)^{1/2}\right]$$

根据寻常波和非寻常波的色散关系可以看出寻常波只有一个截止点，没共振点，非寻常波有两个截止点，一个共振点，F. F. Chen P82

平行于 $\vec{B}_0$ **的电磁波**：简单地将上面的 $\vec{k}$ 从 $k\hat{x}$ 改成 $k\hat{z}$，利用同样的方式得到色散关系

$$\omega^2-c^2k^2=\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{1\mp(\omega_{\mathrm{ce}}/\omega)}$$

也有两个解，分别对应

$$n_{\mathrm{R}}^2=1-\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2/\omega^2}{1-(\omega_{\mathrm{ce}}/\omega)}$$
$$n_{\mathrm{L}}^2=1-\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2/\omega^2}{1+(\omega_{\mathrm{ce}}/\omega)}$$

对 R 波，在 $\omega=\omega_{\mathrm{ce}}$ 时，k 变为无穷大，跟电子回旋共振，波的能量不断交给电子，不能传播，L 波很明显不能与电子共振，如果有，在 $\omega=\omega_{\mathrm{ci}}$ 会发生共振。$k=0$ 会发生截止，截止方程也是 $\omega^2\mp\omega\omega_{\mathrm{ce}}-\omega_{\mathrm{pe}}^2=0$，利用相同的方法得出 R 波有较高的截止频率 ω_{R}，L 波有较低的截止频率 ω_{L} **法拉第旋转**：

$$\frac{E_x}{E_y}=\cot\frac{k_{\mathrm{L}}-k_{\mathrm{R}}}{2}z$$

磁流体波（低频离子电磁波），两种：沿 $\vec{B}_0$ 传播的磁流体波或 Alfvén 波以及磁声波。忽略电子运动，考虑单流体方程，磁流体波用到的线性化方程组有：

Alfvén 波：假定 $\vec{k}=k\hat{z}$, $\vec{E}_1=E_1\hat{x}$，利用在推等体光波的公式：

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\times\vec{E}_1&=-\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{E}_1)+k^2\vec{E}_1\\&=\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}_1+\frac{4\pi\mathrm{i}\omega}{c^2}\vec{j}_1\end{aligned}$$

按照上面的假定该方程只有 x 分量是不为 0 的，因此

$$(\omega^2-c^2k^2)E_{1x}=-4\pi\mathrm{i}\omega n_0e(v_{\mathrm{i}x}-v_{\mathrm{e}x})$$

最后得出 **Alfvén 速度**（推一下）：

$$\vec{v}_{\mathrm{A}}=\frac{cB_0}{(4\pi\rho_0)^{1/2}}=\sqrt{\frac{B_0^2}{\mu_0\rho_0}}$$

因为有电漂移，粒子可以像粘在磁力线上，产生横向的回复力，形成横波
另一种 Alfvén 波推导方法：利用 MHD 和理想导电流体的原则

$$\rho\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}=\vec{j}\times\vec{B}$$
$$\vec{j}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{B}$$
$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$
$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}=0$$

设平衡解；$\vec{u}_0=0$, $\vec{j}_0=0$, $\vec{E}_0=0$, $\vec{B}_0=B_0\hat{x}$，线性化，前两个方程得：

$$\rho_0\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t}=\frac{1}{\mu}\nabla\cdot(\vec{B}\vec{B}-\frac{1}{2}B^2\overrightarrow{I})$$

且 $B^2=(B_0\hat{x}+B_1\hat{y})\cdot(B_0\hat{x}+B_1\hat{y})\approx B_0^2$
再求分量也可以解得 Alfvén 速度
磁声波：$\vec{B}_0=B_0\hat{z}$, $\vec{E}_1=E_1\hat{x}$, $\vec{k}=k\hat{y}$，这里电漂移沿着 $\vec{k}$ 方向，有离子的热压变化，所以要考虑 $-\nabla p$ 项，运动方程：

$$m_{\mathrm{i}}n_0\frac{\partial\vec{v}_{\mathrm{i}1}}{\partial t}=en_0(\vec{E}_1+\vec{v}_{\mathrm{i}1}\times\vec{B}_0)-\nabla p$$

再写出 x,y 方向上的分量，加上连续性方程：

$$\frac{n_1}{n_0}=\frac{k}{\omega}v_{\mathrm{i}y}$$

以及电磁波动方程的 Fourier 形式：

$$(\omega^2-c^2k^2)E_{1x}=-4\pi\mathrm{i}\omega n_0e(v_{\mathrm{i}x}-v_{\mathrm{e}x})$$

取小电子质量极限：$\omega^2\ll\omega_{\mathrm{c}}^2$, $\omega^2\ll k^2v_{\mathrm{the}}^2$ 且假定 $\omega^2\ll\omega_{\mathrm{ci}}^2$，得到：

$$\frac{\omega^2}{k^2}=c^2\frac{v_{\mathrm{s}}^2+v_{\mathrm{A}}^2}{c^2+v_{\mathrm{A}}^2}$$

基本等离体子 MHD 波总结：

电子波（静电）

- 等离子体振荡 $\vec{B}_0=0$ ($\vec{k}\parallel\vec{B}_0$)

$$\omega^2=\omega_{\mathrm{pe}}^2+k^2v_{\mathrm{the}}^2$$

- 上杂化振荡 $\vec{k}\perp\vec{B}_0$

$$\omega^2=\omega_{\mathrm{pe}}^2+\omega_{\mathrm{ce}}^2=\omega_{\mathrm{h}}^2$$

离子波（静电）

- 声波 $\omega^2=k^2v_{\mathrm{s}}^2=k^2\frac{\gamma_{\mathrm{e}}T_{\mathrm{e}}+\gamma_{\mathrm{i}}T_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{i}}}$
- 静电离子回旋波 $\vec{k}\perp\vec{B}_0$

$$\omega^2=\omega_{\mathrm{ci}}^2+k^2v_{\mathrm{s}}^2$$

  或者下杂化振荡 $\omega^2=\omega_{\mathrm{ci}}^2\omega_{\mathrm{ce}}^2$

电子波（电磁）

- 光波（$\vec{B}_0=0$）$\omega^2=\omega_{\mathrm{pe}}^2+k^2c^2$
- 寻常波（O 波，$\vec{k}\perp\vec{B}_0$, $\vec{E}_1\parallel\vec{B}_0$）

$$\omega^2=\omega_{\mathrm{pe}}^2+k^2c^2$$

- 非寻常波（X 波，$\vec{k}\perp\vec{B}_0$, $\vec{E}_1\perp\vec{B}_0$）

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2}=\frac{c^2}{v_\phi^2}=1-\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\frac{(\omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2)}{(\omega^2-\omega_{\mathrm{h}}^2)}$$

- 哨声波（R 波，$\vec{k}\parallel\vec{B}_0$）

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2}=1-\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2/\omega^2}{1-(\omega_{\mathrm{ce}}/\omega)}$$

- L 波 $\frac{c^2k^2}{\omega^2}=1-\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2/\omega^2}{1+(\omega_{\mathrm{ce}}/\omega)}$

离子波（电磁）

- Alfvén 波（$\vec{k}\perp\vec{B}_0$）$\omega^2=k^2v_{\mathrm{A}}^2$
- 磁声波（$\vec{k}\perp\vec{B}_0$）$\omega^2=c^2\frac{v_{\mathrm{s}}^2+v_{\mathrm{A}}^2}{c^2+v_{\mathrm{A}}^2}$

平衡方程：

$$\rho\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-\nabla p+\vec{J}\times\vec{B}\to\nabla p=\vec{J}\times\vec{B}$$

由 $\vec{B}\cdot\nabla p=0$, $\vec{J}\cdot\nabla p=0$ 可知，等体压强沿着磁感线和电流线没有梯度，在任意磁面上压强为常数，可以有 $p(\Phi)$, $J(\Phi)$
等体不稳定性分析方法有**直观分析**、**简正模分析**、**能量原理**三种方法。柱坐标里平衡方程写成；

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}=J_\theta B_z-J_zB_\theta$$

再利用柱坐标的空间关系，得到 Grad-Shafranov 平衡方程：

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right)=-\mu_0\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\Phi}-\mu_0^2I(\Phi)\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Phi}$$

当出现 $\vec{J}=[0,0,J_z(r)]$，$\vec{B}=[0,B_\theta(r),0]$ 时，是 z 箍缩，当出现 $\vec{J}=[0,J_\theta(r),0]$，$\vec{B}=[0,0,B_z(r)]$ 是 θ 箍缩，这个箍缩更稳定一点，以及压比

$$\beta=\frac{p}{B^2/2\mu_0}$$

能量原理是首先导出等体体系中扰动势能变化的表达式，判断其是否在势能极小值，根据不同的物理问题来判断体系的稳定性
瑞利-泰勒不稳定性：密度轻的物体支撑其上密度重的流体以反抗体积力时出现的不稳定性 ∇n 和 $\vec{g}$ 方向相反，当有平衡磁场时，根据 Ohm 定律，产生扰动电场，再产生扰动磁场从而产生扰动电流，扰动电流与平衡磁场形成的 Lorentz 力如果指向与体积力相反的方向会减弱甚至完全抑制该不稳定性的增长
碰撞

$$\vec{R}=\frac{m_\alpha\vec{r}_\alpha+m_\beta\vec{r}_\beta}{m_\alpha+m_\beta}$$
$$M_\alpha=\frac{m_\alpha}{m_\alpha+m_\beta}$$
$$M_\beta=\frac{m_\beta}{m_\alpha+m_\beta}$$

偏转角表达式

$$r_{\min}=\frac{b^2}{\sqrt{b^2+b_\perp^2}-b_\perp}$$
$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{b_\perp}{b}$$

具体意义参照李定书 P144
双极扩散：由于电子的扩散率远大于离子扩散率，初始时中心区域像边缘的电子扩散流远大于离子扩散流，最后慢慢达到电子流和粒子流相等的情况，系统达到准稳态
Vlasov 方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla f+\frac{\vec{F}}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{c}}$$

Ландау 阻尼